

V.C.A.F. Hoja 8

1.- Sea $(X, \|\cdot\|)$ un e.n. Probar que las siguientes aplicaciones son continuas :

a) $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{K}$

b) $+$: $X \times X \longrightarrow X$
 $(x, y) \longrightarrow x+y$

c) \cdot : $\mathbb{K} \times X \longrightarrow X$
 $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$

(Ind: tener en cuenta el problema 6 de la hoja 7 a la hora de asignar una topología a $X \times X$).

2.- Sea $T \in B(X)$. Probar que son equivalentes :

a) T es invertible .

b) T es suprayectiva y $\exists c > 0$ tal que $\|Tx\| \geq c\|x\| \quad \forall x \in X$

3.- Sean $S, T \in B(X)$.

a) Si S y T son invertibles , probar que SoT lo es y $(SoT)^{-1} = T^{-1}oS^{-1}$

b) Si S conmuta con T y este es invertible , probar que entonces S conmuta con T^{-1} .

4.- a) Sea $Tf(s) = \int_0^s K(s,t)f(t)dt$, $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continua y

$f, g \in C[0,1]$. Probar que la ecuación de Volterra, $f = Tf + g$ con núcleo K continuo, tiene siempre una única solución.

b) Sea $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$K(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \geq t; \\ 0 & \text{si } s < t. \end{cases}$$

Sea el operador de Fredholm asociado

$$Tf(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)dt = \int_0^s f(t)dt$$

(Obsérvese que lo que tenemos es un operador de Volterra)

Probar por inducción que el operador T^n tiene como núcleo la función

$K_n(s,t) = \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}$, si $0 \leq t \leq s \leq 1$, y 0 si $t > s$. Deducir que $I-T$ es inversible y

encontrar una expresión concreta para $(I-T)^{-1}$, lo que permite resolver la ecuación $(I-T)(f) = g$ en $C[0,1]$. Calcular la solución para $g(t) = e^t$.

5.- Sean X, Y espacios normados y $T \in B(X, Y)$. Sea $(x_n) \subset X$ de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sea convergente. Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$ es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = T \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n \right)$$

6.- Sean X e Y dos espacios normados y sea $(T_n)_{n \geq 0} \subseteq B(X, Y)$ tal que $\sup_n \|T_n\| < \infty$. Supongamos que $T_n x \rightarrow T_0 x$ para todo $x \in A$ donde $\overline{[A]} = X$. Probar que $T_n x \rightarrow T_0 x$ para todo $x \in X$.

7.- a) Sea $\|\cdot\|$ una norma sobre \mathbb{K}^n tal que $\|e_k\| = 1$ para todo $k = 1, \dots, n$. Probar que $\|x\| \leq \|x\|_1$ para todo $x \in \mathbb{K}^n$.

b) Sea $T \in \mathcal{B}(\ell_p^{(n)}, \ell_r^{(m)})$, donde $\ell_q^{(n)} = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_q)$ y $p, r \in [1, \infty]$; siendo la matriz (a_{ij}) la matriz asociada a T . Probar que $\|T\| \leq \sum_{i,j} |a_{ij}|$. (Sugerencia:

Considerar $Tx = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $T = \sum_{i,j} T_{ij}$ con $T_{ij} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = e_i a_{ij} x_j$

donde $\{e_i\}_{i=1}^m$ son los vectores unitarios de \mathbb{R}^m .)

8.- Sea K compacto y $\phi : C(K) \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal. Probar que si ϕ es positivo (e.d. $\phi(f) \geq 0$ si $f \geq 0$), entonces ϕ es continuo. Probar también que dos cualesquiera de las siguientes condiciones implica la tercera: (a) $\|\phi\| = 1$; (b) $\phi(1) = 1$; (c) ϕ es positivo.