

1.- Probar que un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ tiene la propiedad de Heine-Borel (e.d. si toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente en norma) si y solo si la dimensión de X es finita.

2.- Sea $L_\infty(0, \infty)$ y sea $T : \ell_\infty \longrightarrow L_\infty(0, \infty)$ definida por $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{(n, n+1)}$ para toda $x = (x_n) \in \ell_\infty$. Probar que T es una isometría.

3.- a) Sea (ε_n) una sucesión en \mathbb{K} tal que $|\varepsilon_n| = 1$. Si $x \in \ell_p$, probar que $(\varepsilon_n x_n) \in \ell_p$.

b) Sea $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/q = 1$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Probar que para todo $(x_n) \in \ell_n$ se tiene que $\|x\|_p = \sup\{ \sum_1^{\infty} x_n y_n : y \in B_{\ell_q} \}$.

4.- a) Probar que $(\ell_1)'$ es isométrico al espacio ℓ_∞ .
 b) Probar que $(c_0)'$ es isométrico al espacio ℓ_1 .
 c) Probar que ℓ_1 es isométrico a un subespacio cerrado de $(\ell_\infty)'$.

5.- Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Probar que $\|f\|_p = \sup\{ |Tf| : T \in B_{(L_p(\Omega))'} \}$, para toda $f \in L_p(\Omega)$ y $p \in [1, \infty)$.

6.- a) En $L_p[0, 1]$ se consideran las funciones características $\chi_{I_{k,j}}$ de los intervalos $I_{k,j} = [\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}]$, $j = 1, \dots, k$ y $k = 1, 2, \dots$. Probar que $\chi_{I_{k,j}} \longrightarrow 0$, si $k \longrightarrow \infty$ en norma p , $p \in [1, \infty)$, pero no converge puntualmente a 0.

b) Muestra que $\{n \cdot \chi_{[0, 1/n]}\}_{n \geq 1}$ converge puntualmente a 0 μ -c.t.p., pero no converge en norma en $L_p([0, 1])$, $1 \leq p \leq \infty$.

c) Si $f_n \longrightarrow f$ puntualmente en $[0, 1]$ y existe $g \in L_p[0, 1]$ de modo que $|f_n(t)| \leq g(t)$ en casi todo punto de $[0, 1]$, probar que $f \in L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, y que $f_n \longrightarrow f$ en la norma de $L_p[0, 1]$.

7.- a) Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L_p[0, 1]$ de modo que la sucesión converge uniformemente a una función f sobre $[0, 1]$. Probar que $f \in L_p[0, 1]$ y además la sucesión converge en norma a f .

b) ¿Es cierto el resultado anterior si $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L_p(0, \infty)$?

8.- Sea $\{f_n\}_{n \geq 0} \subseteq L_p(\mu)$ tal que $f_n \rightarrow f_0$ en la norma $\|\cdot\|_p$ y tal que

$$\sum_{n \geq 1} \|f_n - f_0\|_p < \infty. \text{ Probar que } f_n \rightarrow f_0 \text{ puntualmente } \mu\text{-ctp.}$$

9.- Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y para cada $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ μ -medible se define $\|f\|_\infty = \inf\{a > 0 : \mu\{t : |f(t)| > a\} = 0\}$. Probar que: $L_\infty(\Omega) = \{f \in \mathcal{L}(\Omega)/\mathcal{R} : \|f\|_\infty < \infty\}$ es un espacio de Banach.

10.- Sea $([0,1], \Sigma, \mu)$ el intervalo $[0,1]$ con la medida de Lebesgue. Sea $(A_n)_{n=1}^\infty \subseteq \Sigma$ una sucesión de conjuntos medibles, de medida no nula y disjuntos dos a dos. Sea $T : L_p[0,1] \rightarrow L_p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$, definido por

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} f d\mu \right) \chi_{A_n} \quad \forall f \in L_p[0,1].$$

Probar que $T \in B(L_p[0,1])$ y que $\|T\| \leq 1$. (**Indicación:** usar la desigualdad de Jensen)

11.- Sea $\chi_{[a,b]} \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Probar que existe una sucesión (f_n) de funciones continuas de soporte compacto (e.d. $\{t : |f(t)| > 0\}$ es precompacto) tal que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} \chi_{[a,b]}$.

12.- a) Probar la desigualdad de Markov : si $f \in L_1[0,1]$ se tiene que

$$\mu\{t : |f(t)| \geq a\} \leq \frac{1}{a} \int_0^1 |f(t)| dt, \quad a > 0.$$

b) Probar la desigualdad de Tchebychev : si $f \in L_p[0,1]$, entonces

$$\mu\{t : |f(t)| \geq a\} \leq \frac{\|f\|_p^p}{a^p}, \quad a > 0.$$

13.- En los siguientes casos probar las segundas igualdades.

a) Si $f(x) = \sin x$ si $|x| \leq \pi$, 0 en otro caso, entonces

$$f(x) = 2/\pi \int_0^\infty \frac{\sin(t\pi)}{1-t^2} \sin(tx) dt$$

b) Si $f(x) = \cos x$ si $|x| \leq \pi/2$, 0 en otro caso, entonces

$$f(x) = 2/\pi \int_0^\infty \frac{\cos(t\pi/2)}{1-t^2} \cos(tx) dt$$

(**Indicación:** Usar el teorema de inversión de la transformada de Fourier).