HOJA 10:

PROBLEMA 1:]

. ADEMAS $\forall f \in C[a,b] \Rightarrow f \in L_1$ y $f \in L_2$.

CON $C[a,b] \hookrightarrow L_2[a,b] \hookrightarrow L_1[a,b]$ Y POR LAS DESIGUALDADES DE JENSEN

$$\| \ \|_1 \le \| \ \|_2 \le \| \ \|_\infty.$$

ASI EL MISMO EJEMPLO QUE SIRVE PARA VER QUE $(C[a,b] \ \| \ \|_1)$ $\underline{\underline{no}}$ ES COMPLETO SIRVE PARA VER QUE $(C[a,b] \ \langle , \rangle) = (C[a,b], \| \ \|_2)$ TAMPOCO ES COMPLETO

PROBLEMA 2:]

i) $$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \overline{e^{imt}} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(n-m)} dt = \int_{\partial D(0,1)} \frac{z^n \cdot z^{-m}}{iz} dz =$$

POR DEFINICION DE INTEGRAL.

$$= \frac{1}{i} \int_{\partial D(0,1)} z^{n-m-1} dz = \begin{cases} 0 & \text{SI } n \neq m \text{ (TEOREMA DE CAUCHY)} \\ \frac{2\pi i}{i} \operatorname{Ind}_{\partial D(0,1)}(0) = 2\pi & \text{SI } n = m. \end{cases}$$

ii) $$\int_0^{\pi} 1 \times \cos nx \, dx = -\frac{\operatorname{sen} nx}{n} \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2} \cos(m+n)x \, dx + \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2} \cos(m-n)x \, dx = 0$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\cos 2nx}{4n} \Big|_0^{\pi} = \pi/2$$

POR TANTO $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi/2}} \right\}_{n \ge 1}$ ES UN SISTEMA ORTONORMAL EN $L_2[0,\pi]$

HOJA 10:

PROBLEMA 3

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle =$$

$$\underset{\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle = 0}{=} \|x\|^2 + \|y\|^2 \underset{\|x\| = \|y\| = 1}{=} 2$$

POR SER DOS VECTORES ORTONORMALES.

PROBLEMA 4:

SI $\{e_1 \ldots e_n\}$ SON ORTONORMALES ENTONCES SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES. SI $e \notin [e_1 \ldots e_n]$, e ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE DE $e_1 \ldots e_n$.

AHORA $\langle \varepsilon_{n+1}, e_k\rangle = \langle e - \sum_{i=1}^{n} \langle e, e_i\rangle e_i, e_k\rangle =$

$$= \langle e, e_k\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle e, e_i\rangle \langle e_i, e_k\rangle \underset{\langle e_i, e_k\rangle = \begin{cases} 0 & \text{SI } i \neq k \\ 1 & \text{SI } i = k \end{cases}}{=}$$

$$= \langle e, e_k\rangle - \langle e, e_k\rangle = 0$$

ASI ε_{n+1} ES ORTOGONAL A $e_1 \ldots e_n$ Y POR TANTO AL SUBESPACIO VECTORIAL ENGENDRADO POR $e_1 \ldots e_n$.

$$\varepsilon_{n+1} = e - \sum_{i=1}^{n} \langle e, e_i\rangle e_i \in [e_1 \ldots e_n, e].$$

ASI

$$e = \varepsilon_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \langle e, e_i\rangle e_i \in [e_1 \ldots e_n\ \varepsilon_{n+1}]$$

$$[e_1 \ldots e_n, e] = [e_1 \ldots e_n, \varepsilon_{n+1}].$$

PROBLEMA 5º)

$$P_n(x) = \frac{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}}{2^n n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n = a_n R_n(x) \quad \text{con } R_n(x) = \frac{\partial^n (x^2-1)^n}{\partial x^n}$$

con $a_n \in \mathbb{R}$ constante.

SERÁ SUFICIENTE CON VER QUE $R_n(x)$ Y $R_m(x)$ $m < n$.
SON ORTOGONALES. ASÍ

$$\int_{-1}^{1} R_m(x) R_n(x)\,dx \underset{\text{POR PARTES}}{=} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{\partial^m}{\partial x^m}(x^2-1)^m \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}}(x^2-1)^m$$

$$= -\int_{-1}^{1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}(x^2-1)^n \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}}(x^2-1)^m\,dx = \dots$$

REPITIENDO EL PROCESO m VECES MÁS

$$= (-1)^{m+1} \int_{-1}^{1} \frac{\partial^{n-m-1}}{\partial x^{n-m-1}}(x^2-1)^n \frac{\partial^{m+m+1}}{\partial x^{m+m+1}}(x^2-1)^m\,dx = 0$$

YA QUE $(x^2-1)^m = x^{2m} + Q(x)$, Q POLINOMIO DE GRADO MENOR QUE $2m$.

(*) ASÍ $\frac{\partial^m}{\partial x^m}(x^{2m} + Q(x)) = \frac{2m!}{m!} x^m + \frac{\partial^m}{\partial x^m} Q(x)$ SI DERIVAMOS $m+1$ VECES MÁS, TAL DERIVADA ES NULA.

POR OTRO LADO $\|R_n\|_2^2 = \int_{-1}^{1} R_n^2(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\partial^n}{\partial x^n}(x^2-1)^n \frac{\partial^n (x^2-1)^n}{\partial x^n}\,dx =$

$$\underset{\substack{\text{INTEGRANDO}\\ n \text{ VECES POR PARTES}\\ \text{COMO ARRIBA}}}{=} (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}(x^2-1)^n\,dx =$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n (2n)!\,dx = \frac{(n!)^2\, 2^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{a_n^2}$$

ESTA FÓRMULA SE CONSIGUE POR INDUCCIÓN

LUEGO $\{P_n(x) \mid n \geq 0\}$ ES UNA FAMILIA ORTONORMAL.

POR OTRO LADO $[1, x, \dots, x^n]$ ES EL ESPACIO VECTORIAL DE (-/ CADA $P_i(x)$ $i = 0 \dots n$ ES UN POLINOMIO DE GRADO i (POR (*)), POR SER ORTOGONALES POLINOMIOS DE GRADO n, $P_0, P_1, \dots P_n \in [1, x, \dots, x^n]$ SON INDEPENDIENTES, LUEGO $P_0, P_1, \dots P_n$ SON INDEPENDIENTES, LUEGO Y SON $n+1$ VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES, LUEGO FORMAN UNA BASE DE $[1, x, \dots x^n]$ ASÍ

$$[1, x, \dots, x^n] = [P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)].$$

HOJA 10:

PROBLEMA 9:

a) HAY QUE VER QUE $x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$ $\quad 0 < x < 2\pi$.

$x - \pi \in L_2[0, 2\pi]$ AQUÍ $\{1, \cos nx, \operatorname{sen} nx\}$ SON ORTOGONALES

ASÍ $\int_0^{2\pi} x - \pi \, dx = 0$

$$\int_0^{2\pi} (x-\pi)\cos kx \, dx = \frac{\operatorname{sen} kx}{k}(x-\pi)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} kx \, dx = 0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)\operatorname{sen} nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}(x-\pi)\Big|_0^{2\pi} + \underbrace{\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \cos nx \, dx}_{0}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right) = -\frac{2}{n}$$

ASÍ $\quad x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$

PROBLEMA 11: i) $f(x) = |x|$ ES PAR. $\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \operatorname{sen} nx \, dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx = \pi$ y $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx \, dx \underset{\text{FUNCIÓN PAR}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx \, dx \underset{\text{POR PARTES}}{=}$

$$= -\frac{4}{\pi(2n+1)^2}$$

ASÍ $|x| = \pi + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$.

ii) $\cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos x \cos 2x =$

$= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\frac{1}{2}[\cos 3x + \cos x] = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$

$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$

PROBLEMA 12: SEA $f \in C[-\pi,\pi]$ CON SERIE DE FOURIER $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$ y CON $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$

POR EL CRITERIO M-WEIERSTRASS LA SERIE DE FOURIER CONVERGE A UNA FUNCIÓN g UNIFORMEMENTE, POR TANTO $g \in C[-\pi,\pi]$.

COMO $f = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$ M-c.t.p., ASÍ $f = g$ M-c.t.p. Y AMBAS FUNCIONES CONTINUAS, SE SIGUE QUE $f = g$.