HOJA 11:

PROBLEMA 4:]

$\Rightarrow$] SI $a \in \bar{M}$, $\exists (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ con $\alpha_n \longrightarrow a$.

AHORA $\forall f \in X'$ con $f|_M = 0$, $f(\alpha_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Y COMO f ES CONTINUA $f(a) = 0$

$\Leftarrow$] SI $a \notin \bar{M}$ COMO $\{a\}$ ES CONVEXO Y COMPACTO

Y $\bar{M}$ ES CONVEXO Y CERRADO, EL TEOREMA

DE HAHN-BANACH EN FORMA GEOMÉTRICA NOS

PERMITE SEPARAR $\{a\}$ DE $\bar{M}$ ESTRICTAMENTE

ASÍ $\exists f \in X'$, $\alpha \in \mathbb{R}$ Y $\varepsilon > 0$: CON

$$f(m) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon < f(a) \quad (*)$$

COMO $\bar{M}$ ES UN SUBESPACIO VECTORIAL, SI $\exists m_0 \in M$

CON $f(m_0) \neq 0$, $f(\lambda m) = \mathbb{R}$ CUANDO $\lambda \in \mathbb{R}$, LO QUE

CONTRADICE $(*)$. ASÍ $f|_M \equiv 0$.

PROBLEMA 5:]

a) $\Rightarrow$ b) $A \subseteq X$ ACOTADO, ASÍ $\exists M > 0$ CON $\|a\| \leq M$ $\forall a \in A$

SI $f \in X'$ $\Rightarrow$ $\|f(a)\| \leq \|f\| \|a\| \leq \|f\| M$ $\forall a \in A$, ASÍ

$f(A)$ ESTÁ ACOTADO

b) $\Rightarrow$ a) SEA LA ISOMETRÍA $J\ X \longrightarrow X''$

$J(A) \subseteq X''$ Y $\forall f \in X'$.

$$\sup_{a \in J(A)} |a(f)| : \sup_{a \in J(A)} |f(a)| < \infty$$

LUEGO POR EL TEOREMA DE LA ACOTACIÓN UNIFORME

$\exists M > 0$ CON $\sup_{a \in J(A)} \|a\|_{X''} < M$

COMO J ES UNA ISOMETRÍA, SE SIGUE QUE $\sup_{a \in A} \|a\|_X \leq M$.

LUEGO A ESTÁ ACOTADO.

HOJA 11:

PROBLEMA 7:

SEA $I \quad (X \ \| \ \|_2) \longrightarrow (X \ \| \ \|_1)$

$$x \longrightarrow I(x) = x$$

I ES LINEAL, BIYECTIVA Y CONTINUA YA QUE

$$\| I(x) \|_1 = \|x\|_1 \leq C \, \|x\|_2$$

ASÍ POR EL TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA I ES UN ISOMORFISMO Y COMO VIMOS, ESTO IMPLICA (ES EQUIVALENTE A) QUE LAS NORMAS SON EQUIVALENTES

PROBLEMA 8:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f \circ T"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

T ES CONTINUA SI Y SOLO SI $T(B_X)$ ESTA ACOTADO EN Y.

COMO $f \circ T \in X'$, $\forall f \in Y'$, SE SIGUE QUE

$$f(T(B_X)) \text{ ESTA ACOTADO}$$

LUEGO POR EL PROBLEMA 5º $T(B_X)$ ESTÁ ACOTADO EN Y. LO QUE RESUELVE EL PROBLEMA.

HOJA 11ª

PROBLEMA 11:)

a) SEAN $f_m : (c_{00}, \|\ \|_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \forall m \in \mathbb{N}$

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow f_m((x_n)_{n=1}^{\infty}) = m \sum_{k=m}^{\infty} x_k$$

OBVIAMENTE f_m ESTÁ BIEN DEFINIDA (LA SUMA ANTERIOR ES FINITA YA QUE A PARTIR DE UN n_0 TODOS LOS x_n SON NULOS) Y ES LINEAL

$$|f_m(x_n)| \le m \sum_{k=m}^{\infty} |x_k| \le m \|x\|_1$$ ASÍ f

ESTÁ ACOTADA, POR TANTO ES CONTINUA Y $\|f_m\| \le m$.

COMO $f_m(e_m) = m$, $e_m = (0 \cdots 0 \underset{m}{1} 0 \cdots)$, $\|e_m\|_1 = 1$

SE SIGUE QUE $\|f_m\| = m \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty$ Y SIN EMBARGO $\forall\ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$, COMO $\exists n_0$ TAL QUE $\forall n > n_0$ $x_n = 0$ ASÍ $\sup_{m \in \mathbb{N}} f_m(x_n) = \sup_{m \le n_0} f_m(x_n) < \infty$.

b) $(c_{00}, \|\ \|_1)$ NO ES COMPLETO, POR ESO NO SE CONTRADICE EN a) EL TEOREMA DE LA ACOTACIÓN UNIFORME

SEA $a_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, 0, 0, \dots) \in c_{00}$ $\quad \|a_n - a_m\|_1 = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, $m < n$

ES UNA SUCESIÓN DE CAUCHY. SEA $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$ LUEGO

$\exists n_0 : \forall n > n_0\ \alpha_n = 0$; $\quad \|a_n - \alpha\|_1 \ge \frac{1}{2^{n_0+1}}$ $\quad n > n_0$

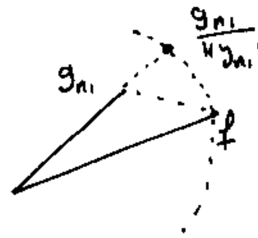
$$a_n \overset{\|\ \|_1}{\not\to} \alpha, \quad \forall \alpha \in c_{00}.$$

HOJA 11:

PROBLEMA 13:] SEA $S' = \{f \in X' : \|f\| = 1\}$ SEA $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq S'$ UN CONJUNTO NUMERABLE DENSO EN S'

ESTE CONJUNTO EXISTE YA QUE SI $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X'$ ES DENSO EN X', SEA $f_n = \frac{y_n}{\|y_n\|} \in S'$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\forall f \in S'$ Y $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y_{n_1}$ CON $\|f - y_{n_1}\| < \varepsilon$



$$\left\|f - \frac{y_{n_1}}{\|y_{n_1}\|}\right\| \le \|f - y_{n_1}\| + \left\|y_{n_1} - \frac{y_{n_1}}{\|y_{n_1}\|}\right\| \le$$

$$\le \varepsilon + \|y_{n_1}\| \left|1 - \frac{1}{\|y\|_1}\right| = \varepsilon + \big|\|y_{n_1}\| - 1\big| \underset{(*)}{\le} 2\varepsilon$$

(*) YA QUE $\big|\|f\| - \|y_{n_1}\|\big| = \big|1 - \|y_{n_1}\|\big| \le \|f - y_{n_1}\| < \varepsilon$

ASÍ $\|y_{n_1}\| \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

PUESTO QUE $\|f_n\| = 1$, EXISTE PARA CADA n, $x_n \in X$ CON $\|x_n\| = 1$ Y $|f_n(x_n)| > 1/2$

SEA $E = [x_n]$, VEAMOS QUE E ES DENSO EN X (SI E ES DENSO EN X, ENTONCES X ES SEPARABLE COMO VIMOS EN TEORÍA)

SI E NO ES DENSO EN X $\Rightarrow \exists x_0 \in X - \overline{E}$, POR EL TEOREMA DE HAHN-BANACH 2ª FORMA GEOMÉTRICA $\exists f \in X'$ TAL QUE $f(x) < \alpha < f(x_0)$ $\forall x \in \overline{E}$. COMO E ES UN SUBESPACIO VECTORIAL, $f|_E = 0$ Y ASÍ $\frac{f}{\|f\|}\Big|_{\overline{E}} = 0$

POR ELLO SUPONEMOS QUE $\|f\| = 1$, PERO ENTONCES $|(f_n - f)(x_n)| > 1/2 \Rightarrow \|f_n - f\| > 1/2$, LUEGO SE CONTRADICE QUE $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ SEA DENSO EN S_1

PROBLEMA 14:]

a) SI $\alpha_n > 0$ Y $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$ EXISTE $M_1 < N_1 < M_2 < N_2 \dots$ etc CON $\sum_{k=M_1}^{N_1} \alpha_k < \frac{1}{1 \cdot 2^1}$ $\dots$ $\sum_{k=M_n}^{N_n} \alpha_k \le \frac{1}{n 2^n}$. SEA $Y = (Y_k)_{n=1}^{\infty}$

$$Y_k = \begin{cases} n & \text{SI } k \in [M_n, N_n] \\ 1 & \text{EN OTRO CASO} \end{cases} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k Y_k = \sum_{\substack{k \notin [M_n, N_n] \\ \forall n}} \alpha_k + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=M_n}^{N_n} \alpha_k Y_k \le \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$