HOJA 6ª

PROBLEMA 2º) DOS NORMAS $\|\ \|$ Y $\|\ \|_*$ SOBRE EL MISMO ESPACIO VECTORIAL X SON EQUIVALENTES SI $\exists M, N \in (0,\infty)$ TAL QUE

$$N \|x\| \leq \|x\|_* \leq M \|x\| \quad \forall x \in X.$$

SI $X = \mathbb{R}^n$ Y $x = (x_1 x_2 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty = \max \{ |x_i| : i = 1 \dots n \} = |x_0| = \sqrt[p]{|x_0|^p} \leq$$

$$\leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} = \|x\|_p$$

POR OTRO LADO $\|x\|_p \leq \sqrt[p]{n \|x\|_\infty^p} = \sqrt[p]{n} \|x\|_\infty$

ASÍ SI $p, q \geq 1$ SE SIGUE QUE

$$\|x\|_p \leq \sqrt[p]{n} \|x\|_\infty \leq \sqrt[p]{n} \|x\|_q \leq \sqrt[p]{n} \sqrt[q]{n} \|x\|_p$$

Y POR TANTO $\frac{1}{\sqrt[p]{n}} \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq \sqrt[q]{n} \|x\|_p \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$

PROBLEMA 3º) a) $A = \{ f \in C[0,1] : f(0) + \int_0^1 f(t) \cos t \, dt \geq 0 \}$

SEA $(f_n \equiv n)_{n=1}^\infty \subseteq A$ ASÍ $\|f_n\|_1 = \|f_n\|_\infty = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

LUEGO EN AMBAS NORMAS A NO ESTÁ ACOTADO Y POR TANTO A NO ES COMPACTO.

- SI $(f_n)_{n=1}^\infty \subseteq A$ Y $f_n \xrightarrow{\|\ \|_\infty} f \Rightarrow \begin{cases} f_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0) \\ \text{Y} \\ f_n(t) \cos t \to f(t) \cos t \text{ UNIFORMEMENTE EN } [0,1] \end{cases}$

ASÍ $\lim_{n\to\infty} f_n(0) + \int_0^1 f_n(t) \cos t \, dt = f(0) + \int_0^1 f(t) \cos t \, dt \geq 0$

(*) POR LAS PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

LUEGO A ES CERRADO EN $(C[0,1] \ \|\ \|_\infty)$

HOJA 6:

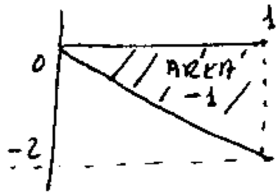
PROBLEMA 3:) $A = \{ f \in C[0,1] : f(0) + \int_0^1 f(t)\cos t \, dt \geq 0 \}$

SEA $f_n \xrightarrow{\| \|_1} f \Rightarrow f_n \cos t \xrightarrow{\| \|_1} f \cos t$

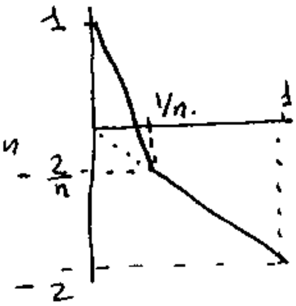
YA QUE $\int_0^1 |f_n(t)\cos t - f(t)\cos t| \, dt \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| \, dt = \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

POR OTRO LADO $\cos t > 0 \quad \forall t \in [0,1]$

SEA $f(t) = -2t$



SEA f_n



SE TIENE QUE $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)| \, dt =$

$$= \int_0^{1/n} |f_n(t) - f(t)| \, dt \leq 2 \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ASÍ $f_n \xrightarrow{\| \|_1} f$

$f_n \in A$ YA QUE $f_n(0) + \int_0^1 f_n(t)\cos t \, dt =$

$$= 1 + \int_0^1 f_n(t)\cos t \, dt \geq 1 - 1 \geq 0$$

Y CLARAMENTE $f \notin A$, LUEGO A NO ES CERRADO

POR OTRO LADO, $0 \in A$ Y $\forall \varepsilon > 0$ $B_0(\varepsilon) \not\subset A$ YA QUE

$f(t) = -\varepsilon/2 \in B_0(\varepsilon)$ Y $f(0) + \int_0^1 -\varepsilon/2 \cos t \, dt < 0$.

LUEGO A NO ES ABIERTO EN $(C[0,1], \| \|_1)$.

HOJA 6:

PROBLEMA 4: $E = C^1[0,1] = \{ f\ [0,1] \to \mathbb{R} \text{ con } f' \in C[0,1] \}$

a) # $\|f\| = |f(0)| + \|f'\|_\infty \geq 0 \quad \forall f \in E$

SI $\|f\| = 0 \Rightarrow \|f'\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f' \equiv 0 \Rightarrow f \equiv ct$ como $|f(0)| = 0$

SE SIGUE QUE $f \equiv 0$.

SEA $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + \|\lambda f'\|_\infty = |\lambda| |f(0)| + |\lambda| \|f'\|_\infty =$

$= |\lambda| (|f(0)| + \|f'\|_\infty) = |\lambda| \|f\|$

SI $f, g \in E$ como $(f+g)' = f' + g'$

$\|f+g\| = |f(0) + g(0)| + \|f' + g'\|_\infty \leq$

$\leq |f(0)| + |g(0)| + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty =$

$= \|f\| + \|g\|.$

LUEGO $\| \ \|$ ES UNA NORMA.

b) SI $f_n \xrightarrow{\| \|} f$, $|f_n(0) - f(0)| + \|f_n' - f'\|_\infty \longrightarrow 0$

ASI $f_n(0) \longrightarrow f(0)$

Y $f_n' \longrightarrow f'$ UNIFORMEMENTE

$\Big\} \Rightarrow f_n \xrightarrow{\| \|_\infty} f$

TEOREMA 1: CURSO

HOJA 6:

PROBLEMA 5:]

a) $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\| \underset{y \to x}{\longrightarrow} 0$ LO QUE PRUEBA QUE $\| \ \| \; X \to \mathbb{K}$ ES CONTINUA EN x.

b) $\|(x+y) - (x'-y')\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\| \underset{\substack{x' \to x \\ y' \to x}}{\longrightarrow} 0$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \varepsilon/2$ TAL QUE SI $d((x,y),(x',y')) =$

$= \max(\|x - x'\|, \|y - y'\|) < \delta$

SE SIGUE QUE $\|(x+y) - (x'-y')\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

PROBLEMA 6:]

$b \Rightarrow a)$ PROCESO DE DIAGONALIZACIÓN DE CANTOR

SEA $(x_n) \subseteq K$, VEAMOS QUE TIENE UNA SUBSUCESIÓN CONVERGENTE.

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists a_1 \dots a_n \in X$ CON $\bigcup B(u_i, \varepsilon) \supseteq K$, ASÍ $\exists i_0$ Y UNA SUBSUCESIÓN $x_{n_k} \subseteq B(u_i, \varepsilon)$

USANDO LO ANTERIOR

$\exists (x_{n,1})$ SUBSUCESIÓN DE x_n CON $(x_{n,1}) \subseteq \overline{B}(u_1, 1)$

$\exists (x_{n,2})$ '' DE $x_{n,1}$ CON $(x_{n,2}) \subseteq \overline{B}(u_2, 1/2)$

$\vdots$

$\exists (x_{n,k})$ '' DE $x_{n,k-1}$ CON $(x_{n,k}) \subseteq \overline{B}(u_k, \frac{1}{2^k})$

SEA $(x_{n,n})$ LA SUBSUCESIÓN DIAGONAL

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n,n} - x_{n+1,n+1}\| \leq \sum \frac{1}{2^n} < \infty$$

COMO $(X, \| \ \|)$ ES UN ESPACIO DE BANACH ES CONVERGENTE; LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} x_{n,n} - x_{n+1,n+1} = \lim_{N \to \infty} x_1 - x_{N+1,N+1}$ EXISTE. LUEGO LO QUE IMPLICA QUE $\lim_{N \to \infty} x_{N+1,N+1}$

(x_n) TIENE UNA SUBSUCESIÓN CONVERGENTE.

HOJA 6:

PROBLEMA 8:] a) SEA $f_n = n$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \varepsilon$ TAL QUE SI $|x-y| < \varepsilon \Rightarrow$
$|f_n(x) - f_n(y)| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

SIN EMBARGO $f_n \overset{\|\cdot\|_\infty}{\not\to}$

PROBLEMA 9:]
$\mathcal{F} = \{ f \in C[0,1] : |f(t)| \leq 1476$ Y $|f'(t)| \leq 2386 \quad \forall t \in [0,1] \}$

$\mathcal{F}$ ESTA UNIFORMEMENTE ACOTADA YA QUE
$\|f\|_\infty \leq 1476 \quad \forall f \in \mathcal{F}$

POR OTRO LADO $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{2386}$ TAL QUE $\forall x, y \in [0,1]$ CON $|x-y| < \delta$

Y $\forall f \in \mathcal{F} \quad |f(x) - f(y)| \underset{\text{T. VALOR MEDIO}}{=} |f'(\xi)||x-y| \leq 2386\,\delta < \varepsilon$.

LUEGO $\mathcal{F}$ ES EQUICONTINUA, LUEGO $\mathcal{F}$ ES PRECOMPACTO EN $C[0,1]$

HOJA 6:

PROBLEMA 11:

SEA $\varepsilon > 0$ Y SEA $A_n = \{ t \in [0,1] : |f(t) - f_n(t)| \geq \varepsilon \}$ $n \in \mathbb{N}$.

1:) A_n ES CERRADO YA QUE $|f - f_n|$ ES CONTINUA
Y $A_n = |f - f_n|^{-1}([\varepsilon, \infty))$

2:) $A_n \subseteq [0,1]$ LUEGO ESTA ACOTADO

3:) CADA A_n ES COMPACTO

4:) $A_{n+1} \subseteq A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
YA QUE $f(t) - f_n(t) \geq f(t) - f_{n+1}(t)$.
Y ASI $\left. f(t) - f_{n+1}(t) \geq \varepsilon \iff t \in A_{n+1} \right] \Rightarrow t \in A_n$.

AHORA: O BIEN $\exists n_0$ CON $A_n = \emptyset$ (Y ASI $\forall n \geq n_0$
$A_n = 0$, CON $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$
(LO QUE PRUEBA LA CONVERGENCIA UNIFORME)

O BIEN $A_n \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Y ASI
$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$ (PROPIEDAD TOPOLÓGICA
SEA $x_n \in A_n$, $\bigcap A_n$ ES COMPACTO
ASI $\exists x_{n_k} \to x$, COMO $(x_{n_k})_{n_k \geq n} \subseteq A_n$
$\Rightarrow x \in A_n$.

$\exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, LUEGO
$x \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Y ASI $|f(x) - f_n(x)| > \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$, LUEGO $f_n(x) \not\to f(x)$

CONTRADICCION: