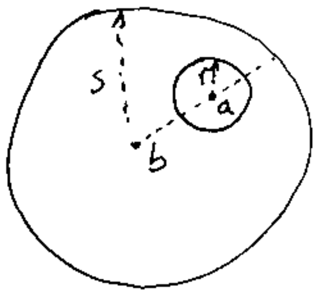
# HOJA 7ª

PROBLEMA 1:]

b) $\|b-a\| \le s-r$ YA QUE SI $\|b-a\| > s-r$




TOMANDO $r_n < r$ Y

$$b + (1+r_n)\frac{(a-b)}{\|a-b\|} = a + r_n\frac{(a-b)}{\|a-b\|}$$

$\|a + r_n\frac{(a-b)}{\|a-b\|} - a\| = r_n$. ASÍ $a + r_n\frac{(a-b)}{\|a-b\|} \in B_a(r)$

Y $\|a + r_n\frac{a-b}{\|a-b\|} - b\| = \|(1+\frac{r_n}{\|a-b\|})(a-b)\| =$

$= \|a-b\| + r_n > s - r + r_n \xrightarrow[r_n\to r]{} s$

ASÍ $a + r_n\frac{a-b}{\|a-b\|} \notin B_b(s)$ SI $r_n$ ESTÁ CERCA DE $r$

LO CUAL ES CONTRADICTORIO, Y POR TANTO $\|b-a\| \le s-r$.

DE LA MISMA FORMA SI $r > s$, TOMANDO $r > r_n > s$

Y $b + (1+r_n)\frac{a-b}{\|a-b\|} = a + r_n\frac{(a-b)}{\|a-b\|}$.

$\|a + r_n\frac{(a-b)}{\|a-b\|} - a\| = r_n < r$, LUEGO $b + (1+r_n)\frac{a-b}{\|a-b\|} \in B_a(r)$

Y POR OTRO LADO

$\|a + r_n\frac{(a-b)}{\|a-b\|} - b\| = \|(1+\frac{r_n}{\|a-b\|})(a-b)\| =$

$= \|a-b\| + r_n > \|a-b\| + s$

Y ASÍ $a + r_n\frac{(a-b)}{\|a-b\|} \notin B_b(s)$ LO CUAL ES CONTRADICTORIO

CON LA HIPÓTESIS.

PROBLEMA 2:] SEA $\{B_{x_n}(r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ CON $B_{x_{n+1}}(r_{n+1}) \subseteq B_{x_n}(r_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ Y ASÍ

POR EL PROBLEMA 1:] $r_{n+1} \le r_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Y POR TANTO LA SUCESIÓN $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

O BIEN $\lim_{n\to\infty} r_n = r = 0$, Y POR TANTO ... Y POR SER $X$ BANACH $\exists x \in X$ CON $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Y

ES DE CAUCHY Y POR SER X ... EN OTRO CASO $x$ NO SERÍA EL LÍMITE

$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{x_n}(r_n)$, EN OTRO CASO ... POR EL PROBLEMA 1:] $\|x_n - x_m\| < |r_n - r_m|$.

O BIEN $\lim_{n\to\infty} r_n = r > 0$, POR EL PROBLEMA 1:] ... TAMBIÉN LO ES $(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \bigcap B_{x_n}(r_n)$.

COMO $(r_n)$ ES DE CAUCHY

# HOJA 7ª

## PROBLEMA 4:

a) SEA $(T_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{n}}_{n}, 0, 0 \ldots)$.

$\|T_n\|_\infty = 1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ LUEGO $(T_n) \xrightarrow{\|\ \|_\infty} 0$ EN $\ell_\infty$

$\|T_n\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 \in \ell_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

SI $T_n \xrightarrow{\|\ \|_1} T \Rightarrow x_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_k$ e.d $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Y ASI $T = (0, 0 \ldots)$, PERO $\|T_n - T\|_1 = \|T_n\| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

LUEGO $T_n \not\xrightarrow{\|\ \|_1}$

## PROBLEMA 5:

SEA $x = (1, \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}_{2^2 \text{ VECES}}, \underbrace{1/3 \ldots 1/3}_{3^3 \text{ VECES}}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{n}, \ldots \frac{1}{n}}_{n^n \text{ VECES}}, \ldots) =$

$= (x_1, x_2 \ldots x_k \ldots)$

CLARAMENTE $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ Y ASI $x \in c_0$ CON $\|x\|_\infty = 1$

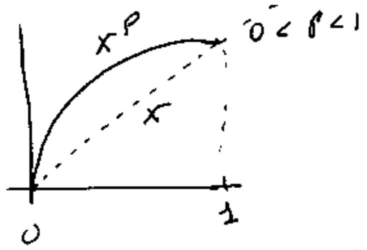
AHORA SEA $p \in [1, \infty)$, $\exists n_0 - 1 > p$, $n_0 \in \mathbb{N}$

Y ASI $\|x\|_p^p \geq \sum_{k=1}^{n_0^{n_0}} \frac{1}{n_0^p} = \frac{n_0^{n_0}}{n_0^p} = n_0^{n_0 - p} > n_0 \xrightarrow[n_0\to\infty]{} \infty$

LUEGO $x \notin \ell_p$.

# HOJA 7:

## PROBLEMA 7:




Si $\| \ \|_p$ fuese una norma, $p \in (0,1)$

$$\|(1,1)\|_p \le \|(1,1)-(1,0)\|_p + \|(1,0)_p\| =$$

$$= 1+1 = 2.$$

Así $(1^p + 1^p)^{1/p} \le 2 \iff 2 \le 2^p \quad p \in (0,1)$

lo cual no es cierto ya que $x \geqslant x^p$ si $x>1$ y si $p \in (0,1)$.

## PROBLEMA 8:

Sea $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ denso en $X$ y sea $\delta_n \downarrow 0$.

$$X = \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ n \in \mathbb{N}}} B(a_k, \delta_n) \quad ; \quad \text{sea } y_n^k \in B(a_k, \delta_n) \cap Y \neq \emptyset$$

(Si $B(a_k,\delta_n) = \emptyset$, no se toma ningún elemento de $Y$)

$(y_n^k)_{n,k \in \mathbb{N}}$ es un conjunto numerable de $Y$.

Sea $y \in Y$ y sea $\varepsilon > 0$, para $\delta_{n_0} < \varepsilon/2$ $\exists a_k$ con $y \in B(a_k, \delta_{n_0})$. Y sea $y_{n_0}^k \in Y$

$$\|y_{n_0}^k - y\| \le \|y_{n_0}^k - a_k\| + \|a_k - y\| \le \delta_{n_0} + \delta_{n_0} < \varepsilon.$$

lo que prueba que $(y_n^k)_{n,k \in \mathbb{N}}$ es denso en $Y$.

HOJA 7:

PROBLEMA 9:

1) $\forall f, g \in \{ f \in C[0,1] : \int f = 1 \} \overset{\text{not.}}{=} A$

y $\alpha \in [0,1]$ $\quad \int \alpha f(t) + (1-\alpha) g(t) dt = \alpha \int f + (1-\alpha) \int g =$

$= \alpha + (1-\alpha) = 1$

LUEGO $\alpha f + (1-\alpha) g \in A$ ; A ES CONVEXO

2) SEAN $x_1 = (3/2, 0, 0 \dots 0, \dots) \in \ell_\infty$ $\quad \|x_1\|_\infty = 3/2 \in (1,2)$

$x_2 = (-3/2, 0, 0 \dots 0, \dots) \in \ell_\infty$ $\quad \|x_2\|_\infty = 3/2 \in (1,2)$

PARA $\alpha = 1/2$ $\quad \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 \equiv 0$ y $\|0\|_\infty = 0 \notin (1,2)$

LUEGO EL CONJUNTO EN CUESTIÓN, NO ES CONVEXO.