HOJA 8ª

PROBLEMA 1:]

a) $x, y \in X$ $\quad \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$

LUEGO DADO $\varepsilon > 0$ SI TOMAMOS $\delta = \varepsilon$ Y $\|x-y\| \leq \delta$

$\Rightarrow \big| \|x\| - \|y\| \big| < \varepsilon$ LUEGO $\| \ \|$ ES

CONTINUA EN x, $\forall x \in X$.

b) $\|(x,y)\|_p = \max\{\|x\|, \|y\|\}$, $(x,y) \in X^2$ ES UNA NORMA SOBRE X^2, ASÍ

$$\|(x+y) - (x'+y')\| = \|(x-x') + (y-y')\| \leq$$

$$\leq \|x-x'\| + \|y-y'\| \leq 2\,\|(x,y) - (x',y')\|_p =$$

$$= 2\max(\|x-x'\|, \|y-y'\|)$$

LUEGO $\forall \varepsilon > 0$ TOMANDO $\delta = \varepsilon/2$ -- etc SE PRUEBA LA CONTINUIDAD DE LA SUMA

PROBLEMA 2:] $T \in B(X)$ ES LINEAL Y CONTINUA.

a) $\Rightarrow$ b) SI T ES INVERTIBLE $\Rightarrow \exists\, T^{-1}$ CONTINUA

ASÍ $\forall x \in X$ $\quad \|x\| = \|T^{-1} \circ T(x)\| \leq \|T^{-1}\|\,\|T(x)\|$

Y ASÍ $\quad \dfrac{1}{\|T^{-1}\|}\|x\| \leq \|T(x)\| \quad \forall x \in X$.

POR OTRO LADO $\quad T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$

SEA $y \in X$ Y SEA $T^{-1}(y) \in X \quad \Rightarrow T(T^{-1}(y)) = y$.

LUEGO T ES SUPRAYECTIVA.

b) $\Rightarrow$ a) <u>T ES INYECTIVA</u> YA QUE SI $x, y \in X$ CON $T(x) = T(y)$

$\Rightarrow T(x-y) = 0$ ASÍ $0 = \|T(x-y)\| \geq c\|x-y\|$ $\quad c > 0$

LUEGO $\|x-y\| = 0 \quad \Rightarrow x = y$

POR TANTO, T SUPRAYECTIVA Y INYECTIVA $\Rightarrow \exists\, T^{-1}\; X \to X$ ASÍ

CON $\quad c\|T^{-1}(y)\| \leq \|T\,T^{-1}(y)\| = \|y\|$

$\|T^{-1}(y)\| \leq \dfrac{1}{c}\|y\| \quad \forall y \in X$, LUEGO T^{-1} ES CONTINUA.

HOJA 8ª

PROBLEMA 3º]

a) SI S y T SON INVERTIBLES $\exists S^{-1}$ y T^{-1}

AHORA $(S\circ T)\circ(T^{-1}\circ S^{-1}) = S\circ I\circ S^{-1} = S\circ S^{-1} = I$

y $(T^{-1}\circ S^{-1})\circ(S\circ T) = T^{-1}\circ I\circ T = I$

LUEGO $(S\circ T)^{-1}$ EXISTE y ES $T^{-1}\circ S^{-1}$

b) SI $S\circ T = T\circ S$

ENTONCES $S\circ I = S\circ T\circ T^{-1} = T\circ S\circ T^{-1}$

$I\circ S = T^{-1}\circ T\circ S \quad T^{-1}\circ S\circ T$

ASI $T\circ S\circ T^{-1} \quad T^{-1}\circ S\circ T$

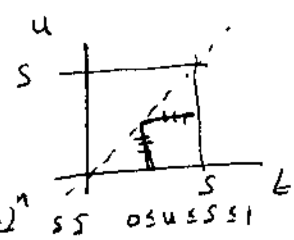
$\Rightarrow \boxed{I\circ S\circ T^{-1} = T^{-1}\circ T^{-1}\circ S\circ T = T^{-1}\circ T^{-1}\circ T\circ S = T^{-1}\circ S}$

PROBLEMA 4:]

b) SI $n=1$ $\quad K_1(s,t) = \dfrac{(s-t)^{1-1}}{(1-1)!} = 1 \qquad Tf(s) = \int_0^s 1\cdot f(t)\,dt$

SI T^n TIENE UN NUCLEO $K_n(s,t) = \dfrac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ SI $0\le t\le s\le 1$; 0 EN OTRO CASO

$$T^{n+1}f(s) = T\,T^n f(s) = \int_0^s T^n f(t)\,dt = \int_0^s\int_0^1 K_n(t,u)f(u)\,du =$$



$$= \int_0^s\int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\,du\,dt \underset{\text{T. FUBINI}}{=}$$

$$= \int_0^s f(u)\int_u^s \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt\,du = \int_0^s f(u)\left[\frac{(t-u)^n}{n!}\right]_u^s du =$$

$$= \int_0^s f(u)\frac{(s-u)^n}{n!}\,du \qquad \text{ASI } K_{n+1}(s,u) = \begin{cases}\dfrac{(s-u)^n}{n!} & \text{SI } 0\le u\le s\le 1\\ 0 & \text{EN OTRO CASO}\end{cases}$$

$$|T^n f(s)| \le \|f(u)\|\int_0^s \left|\frac{(s-u)^{n-1}}{(n-1)!}\right| du \le -\frac{(s-u)^n}{n!}\Big|_0^s = \frac{s^n}{n!} \underset{s\le 1}{\le} \frac{1}{n!}$$

LUEGO $\|T^n\| \le \frac{1}{n!}$ y ASI $\sum \|T^n\| \le e$.

POR LA PRUEBA DEL TEOREMA DE EXPANSION DE NEUMANN. y $(I-T)f(s) = e^s$ TIENE POR

$(I-T)^{-1} = I + T + T^2 + \dots + T^n$.

SOLUCION $f(s) = (I-T)^{-1}(e^t)(s)$

COMO $(I+T+\dots+T^n)(e^t)(s) = e^s + \int_0^s e^t\,dt + \int_0^s \frac{(s-t)}{1!}e^t\,dt + \dots + \int_0^s \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}e^t\,dt =$

$$= e^s + \int_0^s e^t\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(s-t)^k}{k!}\right]dt \to e^s + \int_0^s e^t e^{s-t}\,dt = e^s - e^s s.$$

HOJA 8:

PROBLEMA 5: $\exists\, x = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n$, POR SER T CONTINUA

$$T(x) = T\left(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n\right) = \lim_{k\to\infty} T\left(\sum_{n=1}^{k} x_n\right) \underset{T \text{ LINEAL}}{=}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} T(x_n) \overset{\text{DEF}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n)$$

PROBLEMA 6:

SEA $x \in X$, SI $x \in A$ NO HAY NADA QUE PROBAR

SI $x \in X \setminus A$ COMO A ES DENSO EN X $\exists (a_k) \subseteq A$

CON $a_k \xrightarrow{\|\ \|} x$, COMO CADA T_n ES CONTINUA

$$T_n(a_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} T_n(x)$$

$$\|T_n(x) - T_0(x)\| = \|T_n(x) - T_n(a_k) + T_n(a_k) - T_0(a_k) + T_0(a_k) - T_0(x)\| \leq$$

$$\leq \|T_n\|\,\|x - a_k\| + \|T_n(a_k) - T_0(a_k)\| + \|T_0\|\,\|a_k - x\| \leq$$

(*) DADO $\varepsilon > 0$ SEA k_0 TAL QUE $\forall k \geq k_0$ $\|a_k - x\| \leq \frac{\varepsilon}{3 \sup_n \|T_n\|}$.

FIJANDO a_k EN LAS CONDICIONES ANTERIORES

$\exists n_0 : n \geq n_0$ $\|T_n(a_k) - T_0(a_k)\| < \varepsilon/3$

$$\leq \sup_n \|T_n\| \frac{\varepsilon}{3 \sup_n \|T_n\|} + \varepsilon/3 + \sup_n \|T_n\| \frac{\varepsilon}{3 \sup_n \|T_n\|} \leq \varepsilon$$

LUEGO $T_n(x) \longrightarrow T_0(x)$ $\forall x \in X$