HOJA 9

PROBLEMA 2-) Φ OBVIAMENTE ES LINEAL

SI $t \in (n, n+1)$ $\quad \Phi(x)(t) = x_n \chi_{(n,n+1)}(t) = x_n$

LUEGO $\|\Phi x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_\infty$ LO QUE PRUEBA

QUE Φ ES UNA ISOMETRÍA.

PROBLEMA 3-)

b) SI $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ Y $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q$ CON $\|y_n\|_q \leq 1$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \underset{\text{D. HÖLDER}}{\leq} \|x\|_p \|y\|_q \leq \|x\|_p$$

LUEGO $\|x\|_p \geq \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n : y \in \overline{B_{\ell_q}} \right\}$

POR OTRO LADO $\|x\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| |x_n|^{p-1}$ Y $((x_n)^{p-1}) \in \ell_q$

YA QUE $(p-1)q = p$

ASÍ SI $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ $\exists\, \varepsilon_n$ CON $|\varepsilon_n| = 1$ Y $x_n \varepsilon_n = |x_n|$

$$Y \quad 1 = \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|_p} \right\|_p = \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|_p} \right\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{\varepsilon_n |x_n|^{p-1}}{\|x_n\|_p^p}$$

$$\Rightarrow \|x_n\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{\varepsilon_n |x_n|^{p-1}}{\|x_n\|_p^{p-1}}$$ AHORA $\left(\frac{\varepsilon_n |x_n|^{p-1}}{\|x\|_p^{p-1}} \right) \in \overline{B_{\ell_q}}$

YA QUE $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varepsilon_n|^q |x_n|^{(p-1)q}}{\|x\|_p^{(p-1)q}} = \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} = 1.$$

HOJA 9:

PROBLEMA 1:) a) $d(\ell_1)' = \ell_\infty$?

SI $x \in \ell_1$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$

SI $\varphi\ \ell_1 \longrightarrow \mathbb{K}$, $\varphi(e_n) = a_n$ CON $|\varphi e_n| \le \|\varphi\| \|e_n\| = \|\varphi\|$

ASI $|a_n| \le \|\varphi\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$

LUEGO $(a_n) \in \ell_\infty$

Y $\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum \underset{\in \ell_1}{x_n} \underset{\in \ell_\infty}{a_n}$

POR LA DESIGUALDAD DE HÖLDER $\forall (a_n) \in \ell_\infty$ $\varphi_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n$

VERIFICA QUE $\varphi_a \in (\ell_1)'$ Y QUE $\|\varphi_a\| \le \|a\|$

SEA $J\ \ell_\infty \longrightarrow (\ell_1)'$ CLARAMENTE ES LINEAL Y
$a \longrightarrow \varphi_a$ ES UNA ISOMETRIA

b) SI $x \in c_0$ CON $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$

$\|x - \sum_{n=1}^{N} x_n e_n\|_\infty = \|\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n e_n\|_\infty = \sup_{n>N} |x_n| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

SE SIGUE QUE SI $\varphi\ c_0 \to \mathbb{K}$ LINEAL Y CONTINUA
$x \to \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi(e_n)$

COMO $a_n = (1 \dots 1, 0 \dots 0) \in B_{c_0}$ Y φ ACOTADA $\Rightarrow$
$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(e_n) \in \ell_1$

ASI $J\ (c_0)' \longrightarrow \ell_1$ Y TENIENDO EN
$\varphi \longrightarrow J\varphi = (\varphi(e_n))_{n=1}^{\infty}$

CUENTA LA DESIGUALDAD DE HÖLDER SE VE QUE
J ES UNA ISOMETRIA.

c) SEA $\varphi\ \ell_1 \longrightarrow (\ell_\infty)'$ ASI $|\varphi_a x| = |\sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n| \underset{\text{HÖLDER}}{\le} \|x_n\|_\infty \|a\|_1$
$a = (a_n) \longrightarrow \varphi_a$

LUEGO $\|\varphi_a\| \le \|a\|_1$; φ ES CLARAMENTE
LINEAL E INYECTIVA. VEAMOS QUE ES UNA ISOMETRIA
SI $a = (a_n) \in \ell_1$, SEA $y_n = \frac{|a_n|}{a_n}$ SI $a_n \ne 0$ ASI $(y_n) \in \ell_\infty$ Y $\|y_n\|_\infty = 1$
$|\varphi_a(y_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \|a\|_1 \le \|\varphi_a\|$. ASI $\|\varphi_a\| = \|a\|_1$.

HOJA 9:

PROBLEMA 6:)

a) $\| \chi_{I_{k,j}} \|_p = \left(\int_0^1 |\chi_{I_{k,j}}(t)|^p d\mu \right)^{1/p} = (\mu(I_{k,j}))^{1/p} =$

$= \left(\frac{1}{k}\right)^{1/p} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

LUEGO $\chi_{I_{k,j}} \xrightarrow{\| \ \|_p} 0$

SEA AHORA $t \in [0,1]$ $\forall k$ $\exists j_{k_0}$ CON

$t \in \left[\frac{j_{k_0}-1}{k}, \frac{j_{k_0}}{k}\right]$

ASÍ $\chi_{I_{k,j_{k_0}}}(t) = 1$ $\forall k$, LUEGO NO HAY CONVERGENCIA PUNTUAL

PROBLEMA 8:) COMO $L_p(\mu)$ ES COMPLETO $\exists g \in L_p$ CON $\sum_{n=1}^{\infty} f_n - f_0 = g$ CON CONVERGENCIA EN NORMA

COMO EN LA PRUEBA DE COMPLETITUD DE L_p

$\bar{g}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t) - f_0(t)| \geq 0$ Y $\bar{g}(t) \in L_p$, LUEGO LA SERIE ANTERIOR ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE, POR TANTO CONVERGENTE Y $f_n(t) - f_0(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ μ-c.t.p.

HOJA 9ª

PROBLEMA 10:

$$T: L_p[0,1] \longrightarrow L_p[0,1]$$
$$f \longrightarrow Tf = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu(A_n)}\int_{A_n} f(u)\,d\mu\right)\chi_{A_n}.$$

SI ESTÁ BIEN DEFINIDA CLARAMENTE ES LINEAL POR SERLO LA INTEGRAL Y EL SUMATORIO. SI :

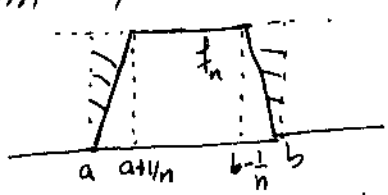
$$\|Tf\|_p^p = \int_0^1 \left[\left|\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu(A_n)}\int_{A_n} f\,d\mu\right)\chi_{A_n}\right|\right]^p d\mu \underset{\substack{\text{TEOREMA}\\ \text{CONVERGENCIA}\\ \text{MONÓTONA}}}{=}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}\left(\frac{1}{\mu(A_n)}\left|\int_{A_n} f\,d\mu\right|\right)^p d\mu \underset{\substack{\text{D. JENSEN}\\ \int_{A_n}\frac{d\mu}{\mu(A_n)}=1}}{\le}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)\int_{A_n}\frac{|f|^p}{\mu(A_n)}\,d\mu \le \int_0^1 |f|^p\,d\mu = \|f\|_p^p$$

ASÍ $\|Tf\|_p \le \|f\|_p$, LUEGO T ESTÁ BIEN DEFINIDA ESTÁ ACOTADA Y $\|T\| \le 1$.

PROBLEMA 11:



SEA f_n ASÍ DEFINIDA

$f_n \longrightarrow \chi_{[a,b]}$ PUNTUALMENTE SALVO EN $\{a,b\}$

$$\|f_n - \chi_{[a,b]}\|_p^p = \int_a^b |f_n(t)-\chi_{[a,b]}|^p\,d\mu = \int_a^{a+1/n}|f_n(t)-1|^p\,d\mu + \int_{b-1/n}^{b}|f_n(t)-1|^p\,d\mu$$
$$\le \int_a^{a+1/n} d\mu + \int_{b-1/n}^{b} d\mu \le \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

PROBLEMA 12:

b) $\mu\{t : |f(t)| \ge a\} = \mu\{t : |f(t)|^p \ge a^p\} \le \frac{1}{a^p}\int_0^1 |f(t)|^p\,dt =$

SI $f\in L_p \Rightarrow |f|^p \in L_1$

$$= \frac{\|f\|_p^p}{a^p}$$