PRÁCTICA 10:

NOMBRE Y APELLIDOS . . . .

1) SEAN X E Y ESPACIOS NORMADOS,

$B(X,Y) = \{ T : X \to Y : T$ LINEAL Y ACOTADO$\}$; Y

$\|T\|_B = \sup\{ \|T(x)\|_Y : x \in \overline{B_X} \} \quad \forall T \in B(X,Y)$

1.1) PROBAR QUE $B(X,Y)$ ES UN ESPACIO VECTORIAL

- SI $T, S \in B(X,Y)$ Y $\lambda \in \mathbb{K}$ LA TEORÍA DE ESPACIOS VECTORIALES NOS DICE QUE $\lambda T + S$ ES UNA APLICACIÓN LINEAL

- POR SER T Y S ACOTADOS, EXISTEN CONSTANTES M Y N POSITIVAS TALES QUE $\|Tx\| \leq M\|x\|$ Y $\|S(x)\| \leq N\|x\| \quad \forall x \in X$,

ASÍ $\|\lambda T + S(x)\| = \|\lambda T(x) + S(x)\| \leq |\lambda| \, \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq$
$\leq |\lambda| M\|x\| + N\|x\| = (|\lambda| M + S)\|x\| \quad \forall x \in X$

LUEGO $\lambda T + S$ ESTÁ ACOTADO Y POR TANTO $\lambda T + S \in B(X,Y)$; LUEGO ES UN ESPACIO VECTORIAL.

1.2) PROBAR QUE $\| \ \|_B$ ES UNA NORMA SOBRE $B(X,Y)$

$\forall T, S \in B(X,Y)$ Y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

- $\|T\|_B = \sup\{ \|T(x)\|_Y \geq 0 : x \in \overline{B_X} \} \geq 0$ Y SI $\|T\|_B = 0 \iff \|T(x)\|_Y = 0 \quad \forall x \in \overline{B_X} \iff T(x) = 0 \quad \forall x \in \overline{B_X}$ ASÍ $T \equiv 0$

- $\|\lambda T\|_B = \sup\{ \|\lambda T(x)\|_Y : x \in \overline{B_X} \} = \sup\{ |\lambda| \, \|T(x)\|_Y \, x \in \overline{B_X} \} = |\lambda| \, \|T\|_B$

- $\|T + S\|_B = \sup\{ \|T + S(x)\|_Y : x \in \overline{B_X} \} \leq \sup\{ \|T(x)\|_Y + \|S(x)\|_Y : x \in \overline{B_X} \} \leq \|T\|_B + \|S\|_B$

1.3) SEA $B(X) \overset{DEF}{=} B(X,X)$, SI $T, S \in B(X)$ PROBAR QUE
$\|T \circ S\|_B \leq \|T\|_B \cdot \|S\|_B$

$\|T \circ S\|_B = \sup\{ \|T \circ S(x)\|_X : x \in \overline{B_X} \} \underset{T \text{ ACOTADO}}{\leq} \sup\{ \|T\|_B \|S(x)\|_X : x \in \overline{B_X} \} =$

$= \|T\|_B \sup\{ \|S(x)\|_X : x \in \overline{B_X} \} = \|T\|_B \cdot \|S\|_B.$

(ℓ_0) SEA $f(s) = \int_0^s k(s,t) f(t)\,dt + g(s)$, CON

$K\ [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUO (ECUACION DE VOLTERRA)

SEA $T\ C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$

$f \longrightarrow Tf(s) = \int_0^s k(s,t) f(t)\,dt$ (OPERADOR DE VOLTERRA).

(ℓ_1): PROBAR QUE T ES LINEAL Y ACOTADO.

K CONTINUO SOBRE UN COMPACTO $[0,1]\times[0,1]$, ESTÁ ACOTADO ASÍ $\exists M>0$ CON $|k(s,t)| \leq M\ \forall (s,t) \in [0,1]\times[0,1]$ ($M = \|k\|_\infty$)

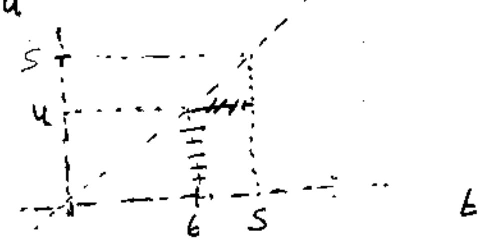
$\forall s \in [0,1]$ $|Tf(s)| \leq \int_0^s |k(s,t)|\,|f(t)|\,dt \leq M\|f\|_\infty$ LUEGO $\|Tf\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$ Y ASÍ $\|T\| \leq M$ (T ACOTADO POR TANTO CONTINUO). [OBVIAMENTE T ES LINEAL POR LA LINEALIDAD DE LA INTEGRAL]

(ℓ_2): CALCULAR T^n Y COMPROBAR QUE $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| < \infty$

IDEA
- PROCEDER POR INDUCCIÓN.
- TENER EN CUENTA EL TEOREMA DE FUBINI

$Tf(s) = \int_0^s k(s,t) f(t)\,dt.$

$T^2 f(s) = \int_0^s k(s,t)\left(\int_0^t k(t,u) f(u)\,du\right) dt \underset{\text{T. FUBINI}}{=}$



$\int_0^s f(u)\left(\int_u^s k(s,t)k(t,u)\,dt\right) du.$

SI $K_2(s,u) = \int_u^s k(s,t)k(t,u)\,dt$

$|T^2 f(s)| \leq \int_0^s |f(u)| \int_u^s |k(s,t)k(t,u)|\,dt\,du \leq \int_0^s M^2(s-u)\,du =$

$= M^2\left[su - \frac{u^2}{2}\right]_0^s = M^2\left[s^2 - \frac{s^2}{2}\right] \leq \frac{M^2}{2} = \frac{\|k\|_\infty^2}{2}$

SI SUPONEMOS QUE $K_n(s,u) = \int_u^s k(s,t) K_{n-1}(t,u)\,dt$ Y $|K_{n-1}(s,u)| \leq \frac{\|k\|_\infty^{n-1}(s-u)^{n-2}}{(n-2)!}$ $n>2$

Y $T^{n-1} f(s) = \int_0^s f(s) K_{n-1}(s,t)\,dt$

$\Rightarrow T^n f(s) = \int_0^s k(s,t) \int_0^t f(u) K_{n-1}(t,u)\,du \underset{\text{FUBINI}}{=} \int_0^s f(u) \int_u^s k(s,t) K_{n-1}(t,u)\,dt\,du = \int_0^s f(u) K_n(s,u)\,du$

Y $|T^n f(s)| \leq \int_0^s |f(u)| \int_u^s |k(s,t) K_{n-1}(t,u)|\,dt\,du \leq \int_0^s \left(\int_u^s \frac{\|k\|_\infty^n (t-u)^{n-2}}{(n-2)!}\,dt\right) du = \int_0^s \|k\|_\infty^n \frac{(s-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,du$

$= \|k\|_\infty^n \frac{s^n}{n!} \underset{s\leq 1}{\leq} \frac{\|k\|_\infty^n}{n!}$ Y ASÍ $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|k\|_\infty^n}{n!} = e^{\|k\|_\infty} - 1.$

(2) 3. USANDO LA PRUEBA DEL TEOREMA DE EXPANSIÓN DE NEUMANN CONCLUIR QUE SI $y \in C[0,1]$, LA ECUACIÓN INTEGRAL DE VOLTERRA TIENE SOLUCIÓN ÚNICA.

DE LA PRUEBA DEL TEOREMA DE EXPANSIÓN DE NEUMANN SI $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| < \infty$, ENTONCES COMO $B(C[0,1])$ ES COMPLETO $S = -\sum_{n=0}^{\infty} T^n \in B(C[0,1])$ Y S ES EL INVERSO DE $T - I$; COMO LA ECUACIÓN DE VOLTERRA SE ESCRIBE COMO

$$If = Tf + g \quad (T \text{ OPERADOR DE VOLTERRA})$$

$$(I-T)f = g \Rightarrow f = (I-T)^{-1}g = (-(T-I))^{-1}g =$$

LUEGO $-Sg = (I + T + T^2 + \cdots)g = f$ ES LA ÚNICA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE VOLTERRA

(3°) SEA X UN ESPACIO VECTORIAL Y SEAN $\| \ \|_1$ Y $\| \ \|_2$ DOS NORMAS DEFINIDAS SOBRE X. PROBAR QUE SON EQUIVALENTES

a) $I (X \| \ \|_1) \longrightarrow (X \| \ \|_2)$ ES UN ISOMORFISMO

b) LAS NORMAS $\| \ \|_1$ Y $\| \ \|_2$ SON EQUIVALENTES

$a \Rightarrow b)$ I CONTINUA LUEGO $\exists M>0$ CON $\|Ix\|_2 = \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \ \forall x \in X$

Y I^{-1} CONTINUA " $\exists N>0$ CON $\|I^{-1}y\|_1 = \|y\|_1 \leq N\|y\|_2 \ \forall x \in X$

ASÍ $\forall x \in X$ $\quad \frac{1}{N}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$

POR TANTO $\| \ \|_1$ Y $\| \ \|_2$ SON EQUIVALENTES TOMANDO $C = \max\{N, M\}$.

$b \Rightarrow a)$ SI $\exists C>0$ CON $\frac{1}{C}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \ \forall x \in X$

ENTONCES $\|Ix\|_2 = \|x\|_2 \leq C\|x\|_1$ ASÍ I ES CONTINUA

Y $\|I^{-1}x\|_1 = \|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ ASÍ I^{-1} ES CONTINUA

COMO I ES BIYECCIÓN LINEAL, ES UN ISOMORFISMO

④ SEA K COMPACTO Y $\Phi : C(K) \to \mathbb{R}$ UN FUNCIONAL LINEAL.

④₁ PROBAR QUE SI Φ ES POSITIVO (e.d. $\Phi(f) \geq 0$ SI $f \geq 0$), ENTONCES Φ ES CONTINUO

SI Φ NO FUESE ACOTADA EXISTIRÍA $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq C(K)$ CON $\|f_n\|_\infty \leq 1$ Y $\Phi(f_n) \uparrow \infty$

POR LA DEFINICIÓN DE $\| \ \|_\infty$, SI $1 \geq \|f_n\|_\infty = \sup \{|f(t)| : t \in [0,1]\}$ Y ASÍ $1 - f_n(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,1]$, POR SER Φ POSITIVA

$0 \leq \Phi(1 - f_n) = \Phi(1) - \Phi(f_n) \downarrow -\infty$

LO CUAL ES CONTRADICTORIO. LUEGO Φ ESTÁ ACOTADA

IDEA

- POR LA DEFINICIÓN DE $\| \ \|_\infty$, SI $f \in B_{C(K)}$ $1 - f(t) \geq 0 \quad \forall t \in K$.
- DE SUPONER QUE Φ NO ESTÁ ACOTADA DEDUCIR QUE NO PUEDE SER POSITIVO

[NOTA: $1 \in C(K)$ LA FUNCIÓN CONSTANTEMENTE IGUAL A 1]

④₂. SI Φ ES LINEAL, POSITIVO Y $\Phi(1) = 1$

DEDUCIR QUE $\|\Phi\| = 1$

POR ④₁ POR SER Φ LINEAL Y POSITIVA ESTÁ ACOTADA

TAMBIÉN POR ④₁ $\forall f \in \overline{B_{C(K)}}$ $1 - f \geq 0$ Y ASÍ $\Phi(1) \geq \Phi(f)$.

LUEGO $\|\Phi\| = \sup \{\Phi(f) : f \in \overline{B_{C(K)}}\} \leq 1 = \Phi(1)$ COMO $1 \in \overline{B_{C(K)}}$

SE SIGUE QUE $\|\Phi\| = 1$.

④₃. SI Φ ES LINEAL, ACOTADO CON $\|\Phi\| = 1$ Y $\Phi(1) = 1$ SI Φ ES POSITIVO.

DEDUCIR QUE Φ ES POSITIVO

$$(*) \quad \boxed{\forall f \in \overline{B_{C(K)}} \underset{\|\Phi\|=1}{\Longrightarrow} \Phi(f) \leq 1 = \Phi(1) \Rightarrow 0 \leq \Phi(1) - \Phi(f) = \Phi(1-f)}$$

SEA $\begin{cases} g \in C(K), \\ g \geq 0 \end{cases}$ $\frac{g}{\|g\|} \in B_{C(K)}$ Y POR DEFINICIÓN DE $\| \ \|_\infty$

$0 \leq 1 - \frac{g}{\|g\|} \leq 1$ $\begin{cases} \frac{g(t)}{\|g\|} \geq 0 \text{ YA QUE } g(t) \geq 0 \\ \text{Y } 1 \geq \frac{g(t)}{\|g\|} \text{ YA QUE } \frac{g}{\|g\|} \in \overline{B_{C(K)}} \end{cases}$

POR TANTO $\Phi\left(\frac{g}{\|g\|}\right) = \Phi\left(1 - \left(1 - \frac{g}{\|g\|}\right)\right) \geq 0$ POR $(*)$

Y COMO $\Phi\left(\frac{g}{\|g\|}\right) = \frac{1}{\|g\|} \Phi(g) \Rightarrow \Phi(g) \geq 0$.