PRÁCTICA 11:

NOMBRE Y APELLIDOS . . . .

1: VAMOS A PROBAR LA DESIGUALDAD DE HÖLDER

1_1: SI $0<\alpha<1$ Y $a\geq 0$, $b\geq 0$ PROBAR QUE $a^{\alpha} b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b$ (*)

SI $a=0$, $0 \leq (1-\alpha) b$

SI $b=0$, $0 \leq \alpha a$

SI $a=b$, $a \leq a$

SI $0<b<a$, $a^{\alpha} b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b \iff$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} \leq \alpha\left(\frac{a}{b}-1\right)+1 \iff$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} - 1^{\alpha} \leq \alpha\left(\frac{a}{b}-1\right) \quad (*)$$

SEA $f(x)=x^{\alpha}$, $f'(x) = x^{\alpha}\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \leq \alpha$

SI $x>1$; COMO $\frac{a}{b}>1$ (*) ES CIERTA POR EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

IDEA

- COMPROBAR LOS CASOS TRIVIALES $a=0$ Ó $b=0$ Ó $a=b$.
- EN (*), SI $0<b<a$, DIVIDIR POR b Y OPERAR
- CUANDO LLEGUÉIS A $x^{\alpha}-1$, $x>1$, APLICAR EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

1_2. SI $1<p<\infty$ Y $q>1$ CON $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

PROBAR QUE $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \leq \|a\|_p \|b\|_q$

DONDE $a=(a_k)_{k=1}^{\infty}$ Y $b=(b_k)_{k=1}^{\infty}$ SON SUCESIONES

SI $a=0$, ASÍ $\|a\|_p=0$, Ó $b=0$ LA DESIGUALDAD ES TRIVIAL

SI $a\notin \ell_p$, $\|a\|_p=\infty$ Ó SI $b\notin\ell_q$ $\|b\|_q=\infty$ ES TRIVIAL LA DESIGUALDAD

Y DE NUEVO ES TRIVIAL LA DESIGUALDAD

SI $\|a\|_p$ Y $\|b\|_q \in (0,\infty)$, TOMANDO PARA CADA

$n\in\mathbb{N}$ $\frac{|a_n|^p}{\|a\|_p^p}$ Y $\frac{|b_n|^q}{\|b\|_q^q}$; $\alpha = 1/p$ $1-\alpha=\frac{1}{q}$

1_1: NOS DICE QUE $\frac{|a_n|}{\|a\|_p}\frac{|b_n|}{\|b\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|a_n|^p}{\|a\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|b_n|^q}{\|b\|_q^q}$

SUMANDO EN n $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n b_n|}{\|a\|_p\|b\|_q} \leq \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|^p}{\|a\|_p^p}+\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|^q}{\|b\|_q^q} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Y DESPEJANDO $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n b_n| \leq \|a\|_p\|b\|_q$

IDEA

- COMPROBAR LOS CASOS TRIVIALES: $a\notin\ell_p$, $b\notin\ell_q$ Ó $a=0$ Ó $b=0$
- APLICAR 1_1 A $c_n = \frac{|a_n|^p}{\|a\|_p^p}$, $d_n=\frac{|b_n|^q}{\|b\|_q^q}$ Y $\alpha=\frac{1}{p}$.

2) PROBAR LA DESIGUALDAD DE MINKOWSKI:

SEA $1 \leq p < \infty$ Y SEAN $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$, $b = (b_n)_{n=1}^{\infty}$

ENTONCES $\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$

SI $a = 0$, $a+b = b$ Y $\|a\|_p = 0 \Rightarrow \|b\|_p \leq \|b\|_p$

SI $a \notin \ell_p$, $\|a\|_p = \infty$ Y ASÍ $\|a+b\|_p \leq \infty$

DE IGUAL MODO SI $b = 0$ Ó $b \notin \ell_p$ SE TIENE DE FORMA TRIVIAL LA DESIGUALDAD

SI $a, b \in \ell_p$, TAMBIÉN $a+b \in \ell_p$

Y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n+b_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n+b_n|\,|a_n+b_n|^{p-1} \leq$

$\leq \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)\,|a_n+b_n|^{p-1} =$

COMO $(p-1)q = (p-1)(1-1/p)^{-1} = p$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$= \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|a_n+b_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\,|a_n+b_n|^{p-1} \leq$ D. HÖLDER (1.2)

$\leq \|a\|_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n+b_n|^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \|b\|_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n+b_n|^{(p-1)q} \right)^{1/q} =$

$= (\|a\|_p + \|b\|_p)\, \|a+b\|_p^{p/q}$

DESPEJANDO $\|a+b\|_p^{-p/q} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n+b_n|^p \right) \leq \|a\|_p + \|b\|_p$

COMO $p - p/q = p(1 - \frac{1}{q}) = 1$ SE SIGUE QUE

$\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$.

IDEA

- COMPROBAR LOS CASOS TRIVIALES: $a \notin \ell_p$, $b \notin \ell_p$ Ó $a = 0$ Ó $b = 0$

- $\sum |a_n+b_n|^p =$
$\leq \sum (|a_n| + |b_n|)\,|a_n+b_n|^{p-1}$

- COMPROBAR QUE $(p-1)q = p$ SI $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

- APLICAR LA DESIGUALDAD DE HÖLDER.

(3) SEA $\mathfrak{z}_n = (x_k^n)_{k=1}^{\infty}$ UNA SUCESIÓN, $n \in \mathbb{N}$

(3.1) ENCONTRAR $(\mathfrak{z}_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \ell_\infty$ Y ℓ_1 CON

$$\mathfrak{z}_n \xrightarrow{\|\ \|_\infty} 0 \quad Y \quad \mathfrak{z}_n \overset{\|\ \|_1}{\not\longrightarrow}$$

SEA $\mathfrak{z}_n = (\underbrace{\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \dots \tfrac{1}{n}}_{n-\text{VECES}}, 0, 0 \dots)$.

$\|\mathfrak{z}_n\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ASÍ $\mathfrak{z}_n \in \ell_\infty$ Y $\mathfrak{z}_n \xrightarrow{\|\ \|_\infty} 0$

$\|\mathfrak{z}_n\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$, ASÍ $\mathfrak{z}_n \in \ell_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

SI $\mathfrak{z}_n \xrightarrow{\|\ \|_1} \mathfrak{z} \Rightarrow |\mathfrak{z}_{n,k} - \mathfrak{z}_k| \leq \|\mathfrak{z}_n - \mathfrak{z}\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

COMO $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{z}_{n,k} = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ IMPLICARÍA QUE $\mathfrak{z} = 0$

COMO $\|\mathfrak{z}_n\|_1 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ NO ES POSIBLE QUE $\|\mathfrak{z}_n - 0\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(3.2) ENCONTRAR $(\mathfrak{z}_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \ell_\infty$ Y ℓ_2 CON

$$\mathfrak{z}_n \xrightarrow{\|\ \|_\infty} 0 \quad Y \quad \mathfrak{z}_n \overset{\|\ \|_2}{\not\longrightarrow}$$

SEA $\mathfrak{z}_n = (\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{n}}, \tfrac{1}{\sqrt{n}}, \dots \tfrac{1}{\sqrt{n}}}_{n\ \text{VECES}}, 0 \dots)$

$\|\mathfrak{z}_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ASÍ $\mathfrak{z}_n \in \ell_\infty$ Y $\mathfrak{z}_n \xrightarrow{\|\ \|_\infty} 0$.

$\|\mathfrak{z}_n\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\right)^{1/2} = 1$, ASÍ $\mathfrak{z}_n \in \ell_2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Y $\mathfrak{z}_{n,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$

COMO $1 = | \|\mathfrak{z}_n\| - \|0\|_2 | \leq \|\mathfrak{z}_n - 0\|_2 \Rightarrow \mathfrak{z}_n \overset{\|\ \|_2}{\not\longrightarrow}$

(3.3) ENCONTRAR $(\mathfrak{z}_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \ell_2$ Y ℓ_1 CON

$$(\mathfrak{z}_n) \xrightarrow{\|\ \|_2} 0 \quad Y \quad (\mathfrak{z}_n) \overset{\|\ \|_1}{\not\longrightarrow}$$

NOS SIRVE EL EJEMPLO DE (3.1)

$\mathfrak{z}_n = (\underbrace{\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n} \dots \tfrac{1}{n}}_{n-\text{VECES}}, 0 \dots)$ $\mathfrak{z}_n \in \ell_1$ $\forall n$ Y $\mathfrak{z}_n \overset{\|\ \|_1}{\not\longrightarrow}$

AHORA $\|\mathfrak{z}_n\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ASÍ $\mathfrak{z}_n \in \ell_2$

Y $\mathfrak{z}_n \xrightarrow{\|\ \|_2} 0$.

(4₁): SEA $\| \ \|$ NORMA EN $\mathbb{K}^n$ CON $\|e_k\| = 1$ $\forall k = 1 \dots n$

PROBAR QUE $\|x\| \leq \|x\|_1$ $\forall x \in \mathbb{K}^n$

[DONDE $e_k = (0 \dots 0 \underset{k}{1} 0 \dots 0)$ $k = 1 \dots n$]

$\forall x \in \mathbb{K}^n$, $x = (x_1 x_2 \dots x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ Y ASÍ

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| \underset{\text{PROP. TRIANGULAR}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \|x_k e_k\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|e_k\| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |x_k| \underset{\text{DEFINICIÓN DE } \| \ \|_1}{=} \|x\|_1$$

(4₂): SEA $T \in B(\ell_p^{(n)}, \ell_r^{(m)})$, DONDE $\ell_q^{(\tilde n)} = (\mathbb{R}^{\tilde n}, \| \ \|_q)$, CON $p, r \in [1, \infty]$. SEA $(a_{ij})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots n}}$ LA MATRIZ ASOCIADA A T. PROBAR QUE

$$\|T\| \leq \sum_{i,j} |a_{i,j}|.$$

IDEA

$$Tx = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$T = \sum_{i,j} T_{i,j}$ CON

$T_{i,j} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix} = e_i a_{ij} x_j$

DONDE e_i SON COMO EN (4₁)

SEA $x = (x_1 \dots x_n) \in \ell_p^{n}$, SI $\|x\|_p \leq 1$

SE TIENE QUE $|x_i| \leq 1$ $\forall i = 1 \dots n$.

SI $e_i = (0 \dots 1 \dots 0) \in \ell_q^{\tilde n}$, ENTONCES

$$\|e_i\|_q = 1$$

COMO T ES LINEAL, ENTRE ESPACIOS DE DIMENSIÓN FINITA,

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{j,i} e_j \quad \forall i = 1 \dots n$$

ASÍ $T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{j,i} e_j$

SI $x \in B_{\ell_p^n}$

$$\|Tx\|_r \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |x_i| |a_{j,i}| \|e_j\|_r \underset{|x_i| \leq 1}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{j,i}|.$$

Y $\|e_j\|_r = 1$

ASÍ POR LA DEFINICIÓN DE NORMA OPERADOR

$$\|T\| \leq \sum_{i,j} |a_{j,i}|.$$