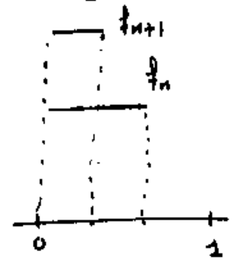
PRÁCTICA 12:

NOMBRE Y APELLIDOS ....

1$_1$: ENCONTRAR UNA SUCESIÓN $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, DE MODO QUE $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ PUNTUALMENTE μ-c.t.p, PERO QUE $f_n \overset{\| \ \|_p}{\not\longrightarrow}$

IDEA



SEA $f_n(x) = n^2 \chi_{[0,1/n]} = \begin{cases} n^2 & \text{SI } x \in [0,1/n] \\ 0 & \text{EN OTRO CASO} \end{cases}$

OBVIAMENTE $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall x \in (0,1]$, LUEGO $f_n \to 0$ PUNTUALMENTE EN $[0,1]$ μ-c.t.p ($\mu(\{0\}) = 0$).

AHORA $\|f_n\|_p^p = \int_{[0,1]} |n^2 \chi_{[0,1/n]}|^p d\mu = n^{2p} \cdot \frac{1}{n} = n^{2p-1}$

LUEGO $\|f_n\|_p = n^{\frac{2p-1}{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ $(p \ge 1)$ LUEGO NO ESTÁ ACOTADA EN NORMA $\| \ \|_p$ Y LA SUCESIÓN $(f_n)_{n\ge1}^{\infty}$ POR TANTO NO PUEDE SER CONVERGENTE.

1$_2$: SI $f_n \longrightarrow f$ PUNTUALMENTE EN $[0,1]$ μ-c.t.p Y EXISTE $g \in L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, CON $|f_n(t)| \le g(t)$. $\forall n \in \mathbb{N}$. EN CASI TODO PUNTO DE $[0,1]$, PROBAR QUE $f \in L_p$ Y QUE $f_n \xrightarrow{\| \ \|_p} f$.

IDEA
USAR EL TEOREMA DE LA CONVERGENCIA DOMINADA.

COMO $|f_n(t)| \le g(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ SE SIGUE, TOMANDO LÍMITES, QUE $|f(t)| \le g(t)$ Y ASÍ $\int_0^1 |f(t)|^p d\mu(t) \le \int_0^1 g^p(t) d\mu(t) < \infty$,

LUEGO $f \in L_p[0,1]$.

COMO $f_n \to f$ PUNTUALMENTE $\Rightarrow f_n - f \to 0$ Y $|f_n(t) - f(t)|^p \to 0$ PUNTUALMENTE EN $[0,1]$ μ-c.t.p. COMO $|f_n(t) - f(t)|^p \le 2^p g^p(t) \in L_p$. POR EL TEOREMA DE LA CONVERGENCIA DOMINADA

$\|f_n - f\|_p^p = \int_{[0,1]} |f_n - f|^p dt \longrightarrow \int_{[0,1]} 0 \, dt = 0$; LUEGO $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ASÍ $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ CONVERGE A f EN NORMA $\| \ \|_p$

(2₁) SEA $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L_p[0,1]$ DE MODO QUE LA SUCESIÓN CONVERGE UNIFORMEMENTE A f SOBRE $[0,1]$. PROBAR QUE $f \in L_p[0,1]$ Y QUE ADEMÁS $f_n \xrightarrow{\|\ \|_p} f$.

<u>IDEA</u>

USAR LA DEFINICIÓN DE CONVERGENCIA UNIFORME

SI $f_n \longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE EN $[0,1]$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : n \geq N \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \in [0,1]$

ASÍ $\|f_n - f\|_p^p = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^p \, d\mu(t) \leq \int_0^1 \varepsilon^p \, d\mu(t) = \varepsilon^p$

SIEMPRE QUE $n \geq N$.

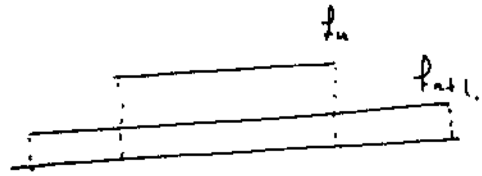
LUEGO $\|f_n - f\|_p \leq \varepsilon$

LUEGO $\|f_n - f\|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$; COMO $f_n - f$ Y $f_n \in L_p[0,1]$

POR SER L_p ESPACIO VECTORIAL $f \in L_p[0,1]$ Y SE TIENE QUE $f_n \xrightarrow{\|\ \|_p} f$

(2₂) ¿ES CIERTO EL RESULTADO ANTERIOR SI $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq L_p(0,\infty)$?

<u>IDEA</u>



LA RESPUESTA ES NO; SEA

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{[-n^{2p}, n^{2p}]} = \begin{cases} 1/n & \text{SI } x \in [-n^{2p}, n^{2p}] \\ 0 & \text{EN OTRO CASO} \end{cases}$$

DADO $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ CON $\frac{1}{N} < \varepsilon$ TAL QUE

$\forall n \geq N \quad |f_n(x) - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$; LUEGO

$f_n \longrightarrow 0$ UNIFORMEMENTE EN $(0,\infty)$

$\|f_n\|_p^p = \int_0^\infty \left(\frac{1}{n} \chi_{[-n^p, n^p]}\right)^p d\mu = \frac{1}{n^p} \cdot 2n^{2p}$; LUEGO $f_n \in L_p[0,\infty) \ \forall n \in \mathbb{N}$

Y $\|f_n\|_p = 2^{1/p} n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$;

PERO COMO LA SUCESIÓN $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ NO ESTÁ ACOTADA EN NORMA $\|\ \|_p$ NO PUEDE SER CONVERGENTE.

3º PROBAR LA DESIGUALDAD DE MARKOV:

(E.D. SI $f\in L_1[0,1]$ Y $a>0$, ENTONCES

$$\mu\{t : |f(t)|\geq a\} \leq \frac{1}{a}\int_0^1 |f(t)|\,dt \quad)$$

$f\in L_1[0,1]$ LUEGO ES MEDIBLE Y ASÍ

$A = f^{-1}\{(-\infty,-a]\cup[a,\infty)\}$ Y $B = f^{-1}((-a,a))$.

SON CONJUNTOS MEDIBLES DISJUNTOS Y $A\cup B=[0,1]$. ASÍ $\int_0^1 |f(t)|\,dt = \int_0^1 |f(t)|(\chi_A+\chi_B)\,dt$

Y $\int_0^1 |f(t)|\,dt \geq \int_0^1 |f(t)|\,\chi_A \geq a\,\mu(A)$

DE LO QUE SE SIGUE QUE

$$\mu(A) \leq \frac{1}{a}\int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

IDEA

- SEAN $A=\{t : |f(t)|\geq a\}$, $B=\{t : |f(t)|< a\}$ ¿SON A Y B MEDIBLES?
- USAR QUE $\int_0^1 |f(t)|\,dt = \int_A |f(t)|\,dt + \int_B |f(t)|\,dt$ ¿POR QUÉ?

4º SI $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{SI } |x|\leq \pi/2 \\ 0 & \text{SI } |x|>\pi/2 \end{cases}$, PROBAR QUE $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(t\pi/2)}{1-t^2}\cos tx\,dt$.

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx = 0$ LUEGO $f\in L_1(\mathbb{R})$.

SU TRANSFORMADA DE FOURIER $\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx =$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\, e^{i\lambda x}\,dx \underset{\text{PARTES}}{=} \operatorname{sen} x\, e^{i\lambda x}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - i\lambda\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen} x\, e^{i\lambda x}\,dx =$$

$$= 2\cos\lambda\frac{\pi}{2} - i\lambda\left[-\cos x\, e^{i\lambda x}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + i\lambda\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\, e^{i\lambda x}\,dx\right) = 2\cos\lambda\pi/2 + \lambda^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\, e^{i\lambda x}\,dx$$

IDEA

- USAR EL TEOREMA DE INVERSIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.
- INTEGRAR POR PARTES.

DESPEJANDO $\hat{f}(\lambda) = \dfrac{2\cos\lambda\pi/2}{1-\lambda^2}$ ESTA FUNCIÓN ES CONTINUA EN TODO $\lambda\in\mathbb{R}$ YA QUE EXISTE LOS LÍMITES PARA $\lambda=\pm 1$.

Y COMO $|\hat{f}(\lambda)| \leq \dfrac{2}{1-\lambda^2}$, RESULTA QUE $\hat{f}\in L_1(\mathbb{R})$.

APLICANDO LA TRANSFORMADA INVERSA $f(x) = \frac{1}{2\pi}\check{\hat{f}}(x) =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\cos\lambda\pi/2}{1-\lambda^2}e^{-ix\lambda}\,dx \underset{f \text{ REAL}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\cos\lambda\pi/2}{1-\lambda^2}\cos\lambda x\,dx \underset{\text{EL INTEGRANDO PAR}}{=}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda\pi/2)}{1-\lambda^2}\cos\lambda x\,d\lambda.$$

5º SEA $L_2(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{K} (= \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C}) : \|f\|_2 < \infty \}$

5.1) PROBAR QUE LA APLICACIÓN

$$\langle \, , \rangle : L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(f, g) \longrightarrow \langle f, g \rangle = \int_\Omega f(x) \overline{g(x)} dx$$

IDEA
USAR LA DESIGUALDAD DE HÖLDER

ESTÁ BIEN DEFINIDA

COMO $|g(x)| = \overline{|g(x)|}$, SI $g \in L_2(\Omega) \Rightarrow \overline{g} \in L_2(\Omega)$

ASÍ $\left| \int_\Omega f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \int_\Omega |f(x) \overline{g(x)}| dx \underset{\text{D. HÖLDER}}{\leq}$

$$\leq \|f\|_2 \|\overline{g}\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2$$

LUEGO $\langle \, , \rangle$ ESTÁ BIEN DEFINIDA YA QUE $\langle f, g \rangle \in \mathbb{K}$ (ES FINITA)

5.2) COMPROBAR QUE $\forall f, g, h \in L_2(\Omega)$ Y $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

IDEA
- USAR LAS PROPIEDADES DE LA INTEGRAL.

a) $\langle f+g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$

b) $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$

c) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$

d) $\langle f, f \rangle \geq 0$.

a) $\langle f+g, h \rangle = \int_\Omega (f+g) \overline{h} \, d\mu = \int_\Omega f \overline{h} + g \overline{h} \, d\mu = \int_\Omega f \overline{h} \, d\mu + \int_\Omega g \overline{h} \, d\mu =$

$= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$.

b) $\langle \lambda f, g \rangle = \int_\Omega \lambda f \overline{g} = \lambda \int_\Omega f \overline{g} = \lambda \langle f, g \rangle$

c) $\langle f, g \rangle = \int_\Omega f \overline{g} \, d\mu = \overline{\int_\Omega \overline{f \overline{g}} \, d\mu} = \overline{\int_\Omega \overline{f} g \, d\mu} = \overline{\int_\Omega g \overline{f} \, d\mu} = \overline{\langle g, f \rangle}$.

d) $\langle f, f \rangle = \int_\Omega f \cdot \overline{f} \, d\mu = \int_\Omega |f|^2 d\mu \geq 0$ YA QUE $|f|^2 \geq 0$.