PRÁCTICA 13ª

NOMBRE Y APELLIDOS: . . . .

1º) SEA $(H, <,>)$ UN ESPACIO PREHILBERT; SEA $x, y, z \in H$ Y $\lambda \in \mathbb{K}$.

1₁) PROBAR QUE $\langle x, \lambda y + z\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

INDICACIÓN: USAR LAS PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

$$\langle x, \lambda y + z\rangle = \overline{\langle \lambda y + z, x\rangle} = \overline{\langle \lambda y, x\rangle + \langle z, x\rangle} =$$
$$= \overline{\langle \lambda y, x\rangle} + \overline{\langle z, x\rangle} = \overline{\lambda \langle y, x\rangle} + \langle x, z\rangle =$$
$$= \overline{\lambda}\, \overline{\langle y, x\rangle} + \langle x, z\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle.$$

1₂º) PROBAR LA IDENTIDAD DEL PARALELOGRAMO:

$$\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle = 2\left[\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle\right]$$

INDICACIÓN: USAR LAS PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \overset{1_1}{=}$$
$$\langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

DEL MISMO MODO

$$\langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - \langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle.$$

LUEGO $\langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = 2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle =$
$$= 2\left[\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle\right]$$

1₃) PROBAR EL TEOREMA DE PITÁGORAS:

$\forall x, y \in H$ CON $\langle x, y\rangle = 0$, ENTONCES
$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle.$$

$$\langle x+y, x+y\rangle \overset{1_1}{=} \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle$$

COMO $0 = \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \Rightarrow \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = 0$

Y ASÍ $\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle$.

14. PROBAR LA DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle.$$

(PARA SIMPLIFICAR TOMAREMOS H REAL, E.D $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)

- SI $x=0$ Ó $y=0$ O BIEN SI $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ CON $x=\lambda y$ ES OBVIA LA <u>IGUALDAD</u> EN CUALQUIER CASO.
- SI $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $x \neq \lambda y$, ENTONCES

$$0 < \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle + \lambda(\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle) \underset{\mathbb{K}=\mathbb{R}}{=} \boxed{\lambda^2\langle y,y\rangle + 2\lambda\langle x,y\rangle + \langle x,x\rangle.}$$

COMO ESTA ECUACIÓN DE 2º GRADO EN λ NO TIENE SOLUCIONES REALES SU DISCRIMINANTE $4\langle x,y\rangle^2 - 4\langle y,y\rangle\langle x,x\rangle \leq 0$

ASÍ $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle y,y\rangle\langle x,x\rangle.$

<u>IDEA</u>

·) SEA $\lambda \in \mathbb{R}$
$0 \leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle =$
...ETC
UNA ECUACIÓN DE 2º GRADO EN λ SIN SOLUCIONES REALES TIENE DISCRIMINANTE ....ETC

15. PROBAR LA DESIGUALDAD DE MINKOWSKI:

$$(\langle x+y, x+y\rangle)^{1/2} \leq (\langle x,x\rangle)^{1/2} + (\langle y,y\rangle)^{1/2}$$

<u>IDEA</u>

USAR 14.

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle$$
$$= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle \underset{\mathrm{Re}\,z \leq |z|\ \forall z\in\mathbb{C}}{\leq}$$
$$\leq \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2|\langle x,y\rangle| \underset{14.}{\leq} \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\sqrt{\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle} =$$
$$= \left(\sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}\right)^2$$

LUEGO TOMANDO RAÍCES CUADRADAS

$$(\langle x+y, x+y\rangle)^{1/2} \leq \sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}$$

16. SI $\forall x \in H$ $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, ESCRIBIR LA IDENTIDAD DEL PARALELOGRAMO Y LA DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ EN TÉRMINOS DE NORMAS.

I. PARALELOGRAMO $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ $\forall x,y \in H$

D. CAUCHY-SCHWARZ $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$ Y ASÍ

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\| \quad \forall x,y \in H.$$

(Q1) PROBAR QUE LA FAMILIA $\{\cos nx, \operatorname{sen} nx\}_{n\geq 0}$ ES ORTOGONAL EN $L_2[-\pi,\pi]$.

SI $n=0$ $\cos 0 = 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx\,dx = \tfrac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n+m)x\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n-m)x\,dx\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{-\cos(n+m)x}{m+n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \tfrac{1}{2}\,\frac{\cos(n-m)x}{n-m}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx \underset{n\neq m}{=} \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\,dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx\,dx \underset{n\neq m}{=} \tfrac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\,dx\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(n-m)x}{n-m}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \tfrac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(n+m)x}{n+m}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

IDEA

•) USAR QUE:

$\cos A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B))$

$\cos A \cos B = \tfrac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$

$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$

••) NO OLVIDAR EL CASO $n=0$

$\boxed{\text{A PARTIR DE AQUÍ, SUPONGAMOS QUE } \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} nx\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ ES UNA BASE ORTONORMAL DE } L_2[-\pi,\pi]}$

(Q2:) SEA $f\in C[-\pi,\pi]$ 2π-PERIÓDICA. SI f ES PAR (e.d $f(-x)=f(x)$) ENTONCES f SE PUEDE ESCRIBIR COMO $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

SI f ES IMPAR ($f(-x) = -f(x)$), ENTONCES $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$.

IDEA: ESCRIBIR f EN LA BASE ORTONORMAL DE $L_2[-\pi,\pi]$.

POR SER f CONTINUA;

$f\in C[-\pi,\pi] \subseteq L_2[-\pi,\pi]$, POR SER $\{1/\sqrt{2\pi}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} nx\}$ UNA BASE ORTONORMAL DE $L_2[-\pi,\pi]$ $\Rightarrow$

$$f(x) = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\langle f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\langle f, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}\right\rangle \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}$$

SI f ES PAR

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx \underset{\substack{x=-u\\ dx=-du}}{=} \int_{\pi}^{-\pi} f(-u)\operatorname{sen} n(-u)\,(-1)\,du \underset{f \text{ PAR}}{=} -\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\operatorname{sen} nu\,du$$

LUEGO $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$

SI f ES IMPAR

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \underset{\substack{-u=x\\ -du=dx}}{=} \int_{\pi}^{-\pi} f(-u)\cos n(-u)\,(-1)\,du = -\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos nu\,du$$

Y ASÍ $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$; DE LO QUE SE SIGUE LO QUE SE PIDE

(2_3) PROBAR QUE $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$, $-\pi \le x \le \pi$.

COMO $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ES BASE ORTONORMAL EN $L_2[-\pi,\pi]$

Y COMO $f(x) = x^2$ ES CONTINUA EN $[-\pi,\pi]$, LUEGO $f \in L_2[-\pi,\pi]$

Y $f(x) = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\rangle \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}\rangle \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}$.

COMO f ES PAR, $\langle f, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}}\rangle = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ SEGÚN (2_2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2\pi^3}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx \underset{\text{PARTES}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\operatorname{sen} nx}{n} x^2\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx\right] =$$

$$= \frac{2}{n\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} -\operatorname{sen} nx\; x\, dx \underset{\text{PARTES}}{=} \frac{2}{n\sqrt{\pi}}\left[x\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\right] =$$

$$= \frac{2}{n\sqrt{\pi}}\left[\frac{\pi(-1)^n + \pi(-1)^n}{n}\right] = \frac{4}{n^2\sqrt{\pi}}(-1)^n.$$

LUEGO $f(x) = \frac{2\pi^3}{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\sqrt{\pi}}(-1)^n\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$.

(2_4) DEMOSTRAR QUE $\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

SI EN (2_3) TOMAMOS $x = \pi$ $\quad \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos n\pi}{n^2} =$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

LUEGO $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right)\frac{1}{4} = \frac{3\pi^2 - \pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}$ c.q.d.