PRÁCTICA 1ª

NOMBRE Y APELLIDOS . . . .

1º SEA H UN ESPACIO DE HILBERT SEPARABLE

1.1 DEDUCIR QUE H ES ISOMÉTRICO A ℓ_2
(TEOREMA DE RIESZ-FISCHER)

POR SER H SEPARABLE SABEMOS QUE EXISTE $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ORTONORMAL, BASE DE H.
ASÍ $\forall x \in H \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$

SEA $T: H \longrightarrow \ell_2$

$$x \longrightarrow T(x) = (\langle x, e_i \rangle)_{i=1}^{\infty}$$

Tx ES UNA SUCESIÓN DE ESCALARES QUE POR LA IDENTIDAD DE PARSEVAL
($\|x\|_H^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2$), $Tx \in \ell_2$
Y CLARAMENTE, T ES UNA ISOMETRÍA
(e.d. $\|Tx\|_2 = \|x\|_H$).

IDEA

•) SI $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq H$ ES UNA BASE ORTONORMAL DE H, LA IGUALDAD DE PARSEVAL DA LA IDEA PARA CONSTRUIR LA ISOMETRÍA

••) PARA PROBAR QUE LA ISOMETRÍA ES SOBREYECTIVA HAY QUE USAR QUE H ES COMPLETO

DE LAS PROPIEDADES DE PRODUCTO ESCALAR
T ES LINEAL ($\langle f+g, e_i \rangle = \langle f, e_i \rangle + \langle g, e_i \rangle$). (ES INYECTIVA POR SER LINEAL E ISOMETRÍA)
ADEMÁS T ES SOBREYECTIVA YA QUE $\forall a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in H$ y $Tx = a$
YA QUE SI $x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in H$, $\|x_n - x_m\|_H^2 \underset{m<n}{=} \langle \sum_{i=m+1}^{n} a_i e_i, \sum_{i=m+1}^{n} a_i e_i \rangle = \sum_{i=m+1}^{n} |a_i|^2 \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$
LUEGO $(x_n) \subseteq H$ ES DE CAUCHY Y $x_n \to x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$
POR SER H HILBERT

1.2 DEDUCIR QUE $L_2[-\pi,\pi] = \{ f: [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : \|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty \}$
ES ISOMÉTRICO A $\ell_2 = \{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \}$.

$L_2[-\pi,\pi]$ TIENE UNA BASE NUMERABLE, POR
EJEMPLO $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n \geq 1}$ LUEGO POR

1.1 L_2 ES ISOMÉTRICO A ℓ_2

2º TEOREMA DE HAHN-BANACH PARA ESPACIOS DE HILBERT.

2.1 PROBAR LO SIGUIENTE:
SEA $M \subseteq H$ UN SUBESPACIO VECTORIAL CERRADO DE UN ESPACIO DE HILBERT H. SI $f\ M \to \mathbb{K}$ ES UN FUNCIONAL LINEAL Y CONTINUO, ENTONCES EXISTE $F \in H^*$ DE MODO QUE

$$F_{|M} = f \quad y \quad \|F\| = \|f\|.$$

IDEA
- SI M ES CERRADO $H = M \oplus M^{\perp}$
Y
$P_M\ H \to M$
ES UNA PROYECCIÓN DE NORMA 1.

POR SER M UN SUBESPACIO CERRADO DE UN ESPACIO DE HILBERT H EXISTE $P\ H \to M$. UNA PROYECCIÓN LINEAL DE NORMA 1 (ed. $P(m) = m\ \forall m \in M$ Y $\|P\| = 1$)

SEA $F\ H \to \mathbb{K}$ $\quad F \overset{DEF}{=} f \circ P$
F ES LINEAL Y CONTINUA POR SER COMPOSICIÓN DE OPERADORES LINEALES Y CONTINUOS

a) - $\forall x \in M \quad F(x) = f \circ P(x) = f(x)$. LUEGO $F_{|M} = f$.

b) - $\|F(x)\| \leq \|f\| \, \|P\| \, \|x\| \underset{\|P\| = 1}{=} \|f\| \, \|x\|$ ASÍ $\|F\| \leq \|f\|$.

c) - COMO $\|F\| = \sup\{|F(x)| : x \in B_H\} \underset{B_M \subseteq B_H}{\geq}$
$\geq \sup\{|F(x)| : x \in B_M\} \underset{x \in M}{=} \sup\{|f(x)| : x \in B_M\} =$
$= \|f\|$.

- LUEGO POR b) Y c) $\|F\| = \|f\|$.

③ SEAN X UN ESPACIO NORMADO Y SEA $C \subseteq X$ UN SUBCONJUNTO ABIERTO Y CONVEXO DE MODO QUE $0 \in C$. SE DEFINE EL FUNCIONAL DE MINKOWSKI POR

$$\rho(x) = \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} \quad x \in X.$$

③₁) PROBAR QUE $\rho(0) = 0$ Y QUE $\exists M > 0$ CON

$$0 \leq \rho(x) \leq M\|x\| \quad \forall x \in X$$

CLARAMENTE $0 \leq \rho(x)$ $\forall x \in X$; POR OTRO LADO $\exists r > 0$ CON $\overline{B_0(r)} \subseteq C$ POR SER C ABIERTO Y $0 \in C$. ASI $\dfrac{x}{\frac{\|x\|}{r}} \in C$

Y ASI $\rho(x) \leq \dfrac{\|x\|}{r}$ SOLO HACE FALTA TOMAR $M = \dfrac{1}{r}$.

IDEA
- C ES ABIERTO, LUEGO $\exists r > 0$ CON $\overline{B_0(r)} \subseteq C$
- SI $x \in X$ CONSIDERAR $r\dfrac{x}{\|x\|}$.

③₂) PROBAR QUE $\forall \lambda \geq 0$ Y $\forall x \in X \Rightarrow \rho(\lambda x) = \lambda \rho(x)$

$\rho(\lambda x) = \inf\left\{\alpha > 0 : \dfrac{\lambda x}{\alpha} \in C\right\} =$

$= \inf\left\{\lambda\left(\dfrac{\alpha}{\lambda}\right) > 0 : \dfrac{x}{\frac{\alpha}{\lambda}} \in C\right\} \underset{\lambda > 0}{=} \lambda \inf\left\{\dfrac{\alpha}{\lambda} > 0 : \dfrac{x}{\frac{\alpha}{\lambda}} \in C\right\} \quad \dfrac{\alpha}{\lambda} = a$

$= \lambda \inf\left\{a > 0 : \dfrac{x}{a} \in C\right\} = \lambda \rho(x)$.

IDEA
METER $\dfrac{\alpha}{\lambda}$ EN LA DEFINICIÓN DE ρ

③₃) PROBAR QUE $C = \{x \in X : \rho(x) < 1\}$

– SI $x \in C$, $\dfrac{x}{1} \in C$ Y ASI $\rho(x) \leq 1$.

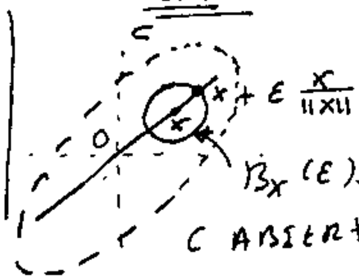
COMO C ES ABIERTO $\exists \varepsilon_x > 0$ CON $B_x(\varepsilon_x) \subseteq C$

Y ASI $x + \dfrac{\varepsilon_x}{2}\dfrac{x}{\|x\|} \in B_x(\varepsilon_x) \subseteq C$, ASI

$x\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{2\|x\|}\right) = \dfrac{x}{1/(1+\varepsilon/2\|x\|)} \in C$, LUEGO $\rho(x) < 1$.

– POR OTRO LADO SI $\rho(x) < 1$, $\exists \alpha < 1$ CON $\frac{1}{\alpha}x \in C$; C ES CONVEXO Y $x = (1-\alpha)0 + \alpha \frac{1}{\alpha}x \in C$, LUEGO $C = \{x \in X : \rho(x) < 1\}$

IDEA



③₄) PROBAR QUE $\forall x, y \in X$ $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

SEA $\varepsilon > 0$, POR DEFINICIÓN DE ρ

$\dfrac{x}{\rho(x)+\varepsilon}$, $\dfrac{y}{\rho(y)+\varepsilon} \in C$, SEA $t_0 = \dfrac{\rho(x)+\varepsilon}{\rho(x)+\rho(y)+2\varepsilon} \in (0,1)$

POR SER C CONVEXO

$$\underbrace{t_0 \frac{x}{\rho(x)+\varepsilon} + (1-t_0)\frac{y}{\rho(y)+\varepsilon}}_{\shortparallel} \in C$$

$$\frac{x}{\rho(x)+\rho(y)+2\varepsilon} + \frac{y}{\rho(x)+\rho(y)+2\varepsilon} \in C \quad \text{LUEGO}$$

$\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y) + 2\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$, COMO LO ANTERIOR ES CIERTO $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

IDEA

SI $\dfrac{x}{\rho(x)+\varepsilon}$, $\dfrac{y}{\rho(y)+\varepsilon} \in C$

SEA $t = \dfrac{\rho(x)+\varepsilon}{\rho(x)+\rho(y)+2\varepsilon} \in (0,1)$

C ES CONVEXO, ASI

$\dfrac{tx}{\rho(x)+\varepsilon} + \dfrac{(1-t)y}{\rho(y)+\varepsilon} \in C$ $\forall t \in (0,1)$.

4º LOS SIGUIENTES ENUNCIADOS SE PRUEBAN UTILIZANDO EL TEOREMA DE HAHN-BANACH.

4.1) PROBAR QUE SI X ES UN ESPACIO NORMADO DE DIMENSIÓN (LINEAL) MAYOR Ó IGUAL QUE 1, ENTONCES $X' \neq \{0\}$

SI $\dim X \geq 1$ EXISTE AL MENOS $a \in X$ CON $a \neq 0$, Y $\|a\| \neq 0$

SEA $f : [a] \to \mathbb{K}$
$\lambda a \to f(\lambda a) = \lambda f(a)$ CON $f(a) = \|a\|$; ASÍ f ES LINEAL Y CONTINUA CON NORMA $\|f\|_{[a]} = 1$. POR EL TEOREMA DE HAHN-BANACH $\exists\, F : X \to \mathbb{K}$ TAL QUE $F|_{[a]} = f$ Y $\|F\| = \|f\|$, LUEGO $F \in X'$ Y CLARAMENTE $F \neq 0$

4.2) SEA X UN ESPACIO NORMADO Y SEAN $a, b \in X$ CON $a \neq b$. PROBAR QUE EXISTE $f \in X'$ TAL QUE $f(a) \neq f(b)$.

SI $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ CON $a = \lambda b$ SEA $f : [a] \to \mathbb{K}$
$\alpha a \to f(\alpha a) = \alpha \|a\|$

SI a Y b SON INDEPENDIENTES SEA $f : [a, b] \to \mathbb{K}$
$\alpha a + \beta b \to f(\alpha a + \beta b) = \alpha \|a\|$ SUPONEMOS $a \neq 0$

ASÍ $f(a) = \|a\|$ Y $f(b) = 0$ (EN AMBOS CASOS SUPONEMOS SINO $b \neq 0$).
EN AMBOS CASOS POR EL TEOREMA DE HAHN-BANACH $\exists F \in X'$ CON $F|_{[a,b]} = f$ Y ASÍ $F(a) \neq F(b)$.

4.3) SEA X UN ESPACIO NORMADO Y SEA $M \subseteq X$ UN SUBESPACIO LINEAL DE DIMENSIÓN FINITA. PROBAR QUE $\exists\, P : X \to M$ CON P UNA PROYECCIÓN (E.D. $P(m) = m \;\forall m \in M$). LINEAL Y CONTINUA

IDEA

¿SI $\{x_1 \dots x_n\} \in X$ $\exists f_i \in X'$ CON $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ $\forall i = 1 \dots n$? $\forall j = 1 \dots n$.

COMO $\dim M = n < \infty$ $\exists \{x_1 \dots x_n\} \subseteq M$ BASE
SEA $f_i : M \to \mathbb{R}$ LINEAL CON $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ $\begin{smallmatrix} i = 1 \dots n \\ j = 1 \dots n \end{smallmatrix}$
CADA f_i ES LINEAL POR DEFINICIÓN Y CONTINUA POR ESTAR DEFINIDA SOBRE UN ESPACIO DE DIMENSIÓN FINITA
POR EL TEOREMA DE HAHN-BANACH $\forall i = 1 \dots n$, $\exists F_i \in X_i'$ CON $F_i|_M = f_i$. SEA $P : X \to M$
$x \to \sum_{i=1}^{n} F_i(x) \cdot x_i$.

P ES LINEAL Y CONTINUA POR SER SUMA DE FUNCIONALES LINEALES Y CONTINUOS. SI $x \in M$, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ Y ASÍ

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x_i)\, x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = x.$$ LUEGO

P ES UNA PROYECCIÓN.