PRÁCTICA 15ª

NOMBRE Y APELLIDOS ....

1º) PROBAR EL 2º TEOREMA DE HAHN-BANACH EN FORMA GEOMÉTRICA

SEAN $A, B \subset X$ DOS SUBCONJUNTOS CONVEXOS, NO VACÍOS Y DISJUNTOS DE UN ESPACIO NORMADO X. SI A ES CERRADO Y B COMPACTO, ENTONCES EXISTE UN HIPERPLANO CERRADO DE X QUE SEPARA A Y B ESTRICTAMENTE.

1_1) PROBAR QUE $\exists \varepsilon > 0$ TAL QUE

$$A_\varepsilon = A + B_0(\varepsilon) \quad Y \quad B_\varepsilon = B + B_0(\varepsilon)$$

SON ABIERTOS, CONVEXOS Y DISJUNTOS

- SEA $r = \inf\{\|a-b\| : a \in A \text{ y } b \in B\} > 0$

SI $r = 0$, POR SER A CERRADO Y B COMPACTO $\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$ LO CUAL NO ES POSIBLE

- ASÍ, SI $\varepsilon < \frac{r}{4}$ $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$, EN OTRO CASO $\exists x + t_1$ Y $y + t_2$, $x \in A$, $y \in B$ Y $t_1, t_2 \in B_0(\varepsilon)$ CON $x + t_1 = y + t_2 \Rightarrow \|x - y\| = \|t_2 - t_1\| < 2\varepsilon < r/2$ LO QUE NO ES POSIBLE POR LA ELECCIÓN DE ε Y r.

- $A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} \{a\} + B_0(\varepsilon)$; COMO CADA $\{a\} + B_0(\varepsilon)$ ES ABIERTO, SU UNIÓN ES ABIERTO; ADEMÁS A_ε ES CONVEXO POR SERLO A Y $B_0(\varepsilon)$.

IDEA

·) $A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} a + B_0(\varepsilon)$

¿POR QUÉ A_ε ES ABIERTO Y CONVEXO?

··) SI $\forall 1/n$ $B_{1/n} \cap A_{1/n} \neq \emptyset$

$\exists x_n = a_n + r_n = b_n + s_n$ CON $a_n \in A$, $b_n \in B$ Y r_n Y $s_n \in B_0(\frac{1}{n})$. ¿QUÉ PASARÍA?

1_2) APLICAR EL TEOREMA DE HAHN-BANACH A A_ε Y B_ε Y DEDUCIR EL RESULTADO

POR EL TEOREMA DE HAHN-BANACH EN FORMA GEOMÉTRICA $\exists f \in X'$ Y $\alpha \in \mathbb{R}$ CON

$$f(x + \tfrac{\varepsilon}{2} z) \leq \alpha \leq f(y - \tfrac{\varepsilon}{2} z) \quad \forall z \in X, \|z\| = 1 \quad \forall x \in A \text{ y } \forall y \in B$$

ASÍ $f(x) + \varepsilon/2\, f(z) \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon/2\, f(z)$ Y TOMANDO SUPREMO E ÍNFIMO EN z

$$f(x) + \varepsilon/2 \|f\| \leq \alpha \leq f(y) + \varepsilon/2 \|f\|$$

ASÍ $f(x) \leq \alpha - \varepsilon/2 \|f\| < \alpha < \alpha + \varepsilon/2 \|f\| \leq f(y)$ $\forall x \in A$ Y $\forall y \in B$

ASÍ $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ ES UN HIPERPLANO CERRADO QUE SEPARA ESTRICTAMENTE A Y B.

IDEA

$\exists f \in X'$ Y $\alpha \in \mathbb{R}$ CON

$f(x + \varepsilon z) \leq \alpha \leq f(y - \varepsilon z)$

$\forall x \in A$, $\forall y \in B$ Y $\forall \varepsilon z \in B_0(\varepsilon)$

(2º) PROBAR EL SIGUIENTE RESULTADO:
SEAN X, Y DOS ESPACIOS DE BANACH Y SEA $T: X \to Y$ UN OPERADOR LINEAL, CONTINUO Y BIYECTIVO, ENTONCES T ES UN ISOMORFISMO

IDEA
•) SOLO HAY QUE VER QUE T^{-1} ES CONTINUA
•) USAR EL TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA

COMO T ES LINEAL, BIYECTIVA Y CONTINUA SOLO HAY QUE VER QUE T^{-1}, QUE EXISTE POR SER T BIYECTIVA, ES CONTINUA
POR EL TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA

$\exists C > 0$ CON $T(B_X(0,1)) \supset B_Y(0,C)$

ASÍ $T^{-1}(B_Y(0,C)) \subseteq B_X(0,1)$

ES DECIR $\|T^{-1}(y)\| \leq 1 \quad \forall y \in Y$ CON $\|y\| < C$

ASÍ $\forall z \in Y$ CON $\|z\| \leq 1 \Rightarrow \|Cz\| \leq C$ Y ASÍ

$$\|T^{-1}(Cz)\| = C\|T^{-1}(z)\| \leq 1 \Rightarrow \|T^{-1}(z)\| \leq 1/C$$

LUEGO $\|T^{-1}\| \leq 1/C$, ESTÁ ACOTADA Y POR TANTO ES CONTINUA.

(3º) SEA $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, CON $\alpha_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Y $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$.
SEA $T: \ell_\infty \to \ell_1$, $T(x = (x_n)_{n=1}^{\infty}) = (\alpha_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ $\forall (x_n) \in \ell_\infty$.
PROBAR QUE $\exists (y_n)_{n=1}^{\infty}$, $y_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ CON $\limsup_n y_n = \infty$ Y TAL QUE $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n < \infty$

IDEA
DE SUPONER QUE TAL SUCESIÓN $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ NO EXISTE, LLEGAR A VER QUE T ES UN ISOMORFISMO Y POR TANTO LLEGAMOS A CONTRADICCIÓN ¿POR QUÉ?

SUPONGAMOS QUE TAL (y_n) NO EXISTE

ASÍ $T: \ell_\infty \to \ell_1$
$x \to Tx = \sum \alpha_n x_n$

COMO $\|Tx\|_1 = \sum |\alpha_n| |x_n| \leq \|x\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$
T ESTÁ BIEN DEFINIDA Y ESTÁ ACOTADA. COMO OBVIAMENTE ES LINEAL, T ES CONTINUA.
AHORA PARA TODO $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$, SEA

$y_n = \dfrac{\gamma_n}{\alpha_n} > 0$ Y POR LA SUPOSICIÓN DE ARRIBA

$\limsup_{n\to\infty} \dfrac{\gamma_n}{\alpha_n} < \infty$, LUEGO $(y_n) \in \ell_\infty$ Y $T(y_n) = (\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ ASÍ

T ES SUPRAYECTIVA. POR (2º) ES UN ISOMORFISMO, PERO ESTO NO ES POSIBLE. ℓ_∞ NO ES SEPARABLE Y ℓ_1 LO ES, LUEGO HEMOS LLEGADO A CONTRADICCIÓN

(4) Sea $X = C[0,1]$ con la norma
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \quad \forall f \in C[0,1]$$

(4.1) Sea $T_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$
$$f \longrightarrow T_n(f) = n\int_0^{1/n} f(t)\,dt$$

IDEA: Acotar $|T_n f|$.

Probar que T_n es lineal y continua $\forall n \in \mathbb{N}$

- $T_n(f+\lambda g) = n\int_0^{1/n} f+\lambda g\,dt =$
$$= n\int_0^{1/n} f\,dt + \lambda\left(n\int_0^{1/n} g\,dt\right) = T_n f + \lambda T_n g \quad \forall f,g \in C[0,1] \text{ y } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Así T_n es lineal

- $|T_n f| = \left|n\int_0^{1/n} f\,dt\right| \leq n\int_0^{1/n} |f(t)|\,dt \leq n\int_0^1 |f(t)|\,dt = n\|f\|_1$

Luego T_n está acotada, $\|T_n\| \leq n$, y por tanto es continua

(4.2) Probar que $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a un funcional T (e.d. $\forall f \in X$ $\exists \lim_{n\to\infty} T_n f \overset{def}{=} T f$). Comprobar que $Tf = f(0)$ $\forall f \in X$

IDEA: Sea $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Por el teorema fundamental del cálculo F es derivable. ¿Cuánto vale $F'(0)$?

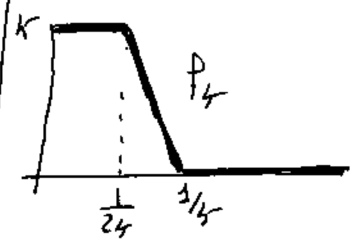
Sea $f \in C[0,1]$, así $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ es una función derivable en todo $[0,1]$ con $F'(x) = f(x)$. En particular
$$f(0) = F'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(1/n) - F(0)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} n\int_0^{1/n} f(t)\,dt =$$
$$= \lim_{n\to\infty} T_n(f)$$
; por tanto existe el límite puntual de la sucesión de operadores $(T_n)_{n=1}^{\infty}$.

4_3 - PROBAR QUE Φ NO ES CONTINUA

IDEA

•) VER QUE Φ NO ESTÁ ACOTADA

••) SEA $k \in \mathbb{N}$ Y SEA



¿ $\|f_k\|_1$?

¿ Φf_k ?

- POR SER Φ UN LÍMITE PUNTUAL DE FUNCIONALES LINEALES, Φ ES LINEAL
- SI VEMOS QUE NO ESTÁ ACOTADA NO SERÁ CONTINUA

SEA f_k COMO EN EL DIBUJO

$$\|f_k\|_1 = \int_0^1 f_k \, dt = \frac{1}{2k} k + \frac{1}{2k} k \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

ADEMÁS $\Phi f_k = f_k(0) = k \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$

LUEGO Φ NO ES CONTINUA

4_4 DEDUCIR QUE $(C[0,1] \; \| \; \|_1)$ NO ES COMPLETO

IDEA

USAR EL TEOREMA DE LA ACOTACIÓN UNIFORME.

SI $(C[0,1] \; \| \; \|_1)$ FUESE COMPLETO, COMO $\mathbb{R}$ LO ES, Y COMO $\Phi_n \, (C[0,1] \| \; \|_1) \to \mathbb{R}$ SON LINEALES Y CONTINUAS CON

$$\sup\{ |\Phi_n f| \; n \in \mathbb{N} \} < \infty$$

(PUES $\Phi_n f \xrightarrow[n \to \infty]{} f(0)$) $\forall f \in C[0,1]$

SE TENDRÍA POR EL TEOREMA DE LA ACOTACIÓN UNIFORME QUE $\Phi \in B(C[0,1], \mathbb{R})$. LO CUAL NO ES POSIBLE POR 4_3.

POR TANTO $(C[0,1] \; \| \; \|_1)$ NO ES COMPLETO.