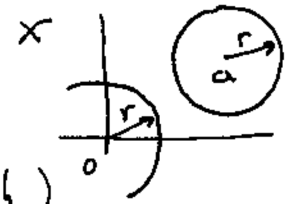
PRÁCTICA 8:

NOMBRE Y APELLIDOS ....

1°) SEA $(X, \|\ \|)$ UN ESPACIO NORMADO; SEA $a \in X$ Y $r > 0$

$B_a(r) \overset{NOT}{=} B(a,r) \overset{DEF}{=} \{x \in X : \|x-a\| < r\}$ BOLA ABIERTA DE CENTRO a Y RADIO r



1_1) PROBAR QUE $B_a(r) = a + B_0(r)$
(DONDE $a + B_0(r) = \{a + x : x \in B_0(r)\}$.)

SI $y \in B_a(r) \Rightarrow \|y-a\| < r$ ASÍ $y - a \in B_0(r)$ Y
POR TANTO $y = a + (y-a) \in a + B_0(r)$.

SI $x \in B_0(r) \Rightarrow \|x\| < r$ Y ASÍ $a + x \in B_a(r)$, LUEGO
$a + B_0(r) \subseteq B_a(r)$.

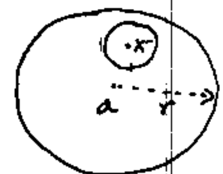
$A \subseteq X$ SE DICE CONJUNTO ABIERTO SI $\forall a \in A\ \exists r > 0$ TAL QUE $B_a(r) \subseteq A$

1_2) PROBAR QUE $\forall a \in X$ Y $\forall r > 0$, $B_a(r)$ ES UN CONJUNTO ABIERTO

SEA $x \in B_a(r)$, $\|x-a\| = \delta < r$
SEA $s = \frac{r-\delta}{2} > 0$ Y SEA $B_x(s)$.
SI $y \in B_x(s)$, $\|y-a\| \leq \|y-x\| + \|x-a\| < \frac{r-\delta}{2} + \delta = \frac{r+\delta}{2} < r$

LUEGO $B_x(s) \subseteq B_a(r)$. LO QUE PRUEBA QUE $B_a(r)$ ES UN ABIERTO.

IDEA

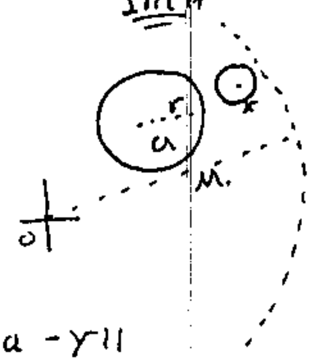


USAR LA PROPIEDAD TRIANGULAR DE LA NORMA

$\overline{B_a(r)} = \{x \in X : \|x-a\| \leq r\}$.

1_3) $\forall a \in X$ Y $r > 0$ PROBAR QUE $\overline{B_a(r)}$ ES UN CONJUNTO CERRADO Y ACOTADO.

IDEA



$- \forall x \in \overline{B_a(r)} \Rightarrow \|x\| \leq \|x-a\| + \|a\| \leq \|a\| + r$

LUEGO $\overline{B_a(r)}$ ESTÁ ACOTADA

$-$ SI $x \notin \overline{B_a(r)} \Rightarrow \|x-a\| = \delta > r$; SEA $s = \frac{\delta - r}{2}$

$B_x(s) \cap \overline{B_a(r)} = \emptyset$ YA QUE $\forall y \in B_x(s)$ $\|a-x\| - \|y-x\| \leq \|a-y\|$
$\|a-x\| \leq \|a-y\| + \|y-x\| \Rightarrow$
Y ASÍ $\|a-y\| \geq \delta - \frac{\delta-r}{2} = \frac{\delta+r}{2} > r$; LUEGO $y \notin \overline{B_a(r)}$
LO QUE PRUEBA QUE $X - \overline{B_a(r)}$ ES ABIERTO $\Rightarrow \overline{B_a(r)}$ ES CERRADO

2° SEA $C[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \ : f \text{ continua} \}$.

$\forall f \in C[0,1]$ $\quad \|f\|_\infty = \sup\{ |f(t)| : t \in [0,1] \}$

$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$

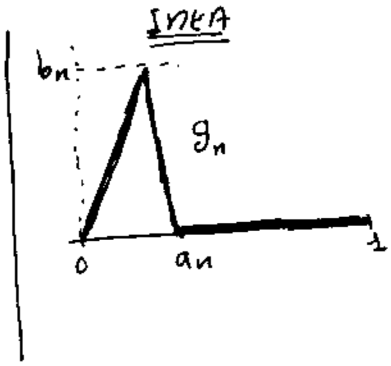
2_1: PROBAR QUE $\|f\|_1 \le \|f\|_\infty \quad \forall f \in C[0,1]$.

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \underset{0 \le |f(t)| \le \|f\|_\infty}{\le} \int_0^1 \|f\|_\infty = \|f\|_\infty \int_0^1 dt = \|f\|_\infty$$

2_2) ENCONTRAR $g_n \in C[0,1]$ TAL QUE

NO EXISTE $M > 0$ VERIFICANDO

$\|g_n\|_\infty \le M \|g_n\|_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$



SEA g_n

COMO LA GRÁFICA DEL DIBUJO. $g_n \in C[0,1]$

Y $\|g_n\|_1 = \int_0^1 g_n(t)\,dt = 1/n \times 2n \times 1/2 = 1$; ASI $\forall M > 0$ $M\|g_n\|_1 = M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

POR OTRO LADO $\|g_n\|_\infty = \max\{ |g_n(t)| : t \in [0,1] \} = 2n \uparrow \infty \quad n \to \infty$.

3° SEA $x = (x_1, x_2 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\|x\|_\infty = \max\{ |x_i| : i = 1 \dots n \}$.

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

PROBAR QUE $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n \|x\|_\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

$$\|x\|_\infty = \max\{ |x_i| : i = 1 \dots n \} = |x_{i_0}| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1 \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |x_{i_0}| = n\,|x_{i_0}| = n\,\|x\|_\infty. \quad \text{c.q.d.}$$

4) SEA K UN ESPACIO MÉTRICO COMPACTO Y SEA
$C(K) = \{ f : K \longrightarrow \mathbb{R} : f$ ES CONTINUA $\}$
SEA $\mathcal{F} \subseteq C(K)$ UN CONJUNTO EQUICONTINUO.
PROBAR QUE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ TAL QUE SI
$t, s \in K$ Y $dist(t,s) < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$

SEA $\varepsilon > 0$, $\forall x \in K$ DE LA DEFINICIÓN DE EQUICONTINUIDAD, SABEMOS QUE $\exists \delta_x > 0$ TAL QUE SI $dist(x,y) < \delta_x$
$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 \quad \forall f \in \mathcal{F}. \quad (*)$$

SEA $\{ B_x(\frac{\delta_x}{4}) \}_{x \in K}$ UN RECUBRIMIENTO ABIERTO DE K, POR SER K COMPACTO $\exists x_1 x_2 \ldots x_n \in K$ TALES QUE
$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{x_i}\left(\frac{\delta_{x_i}}{4}\right)$$

SEA $\delta = \min\{ \frac{\delta_{x_i}}{4} : i = 1 \ldots n \} > 0$. SEAN AHORA $t, s \in K$ CON $dist(t,s) < \delta$, COMO $\exists i_0 \in \{1, 2 \ldots n\}$ CON $t \in B_{x_{i_0}}(\frac{\delta_{x_{i_0}}}{4})$, Y $dist(x_{i_0}, s) \leq dist(x_{i_0}, t) + dist(t,s) \leq$
$$\leq \frac{\delta_{x_{i_0}}}{4} + \delta < \delta_{x_{i_0}}$$

Y ASÍ POR $(*)$
$$|f(t) - f(s)| \leq |f(t) - f(x_{i_0})| + |f(x_{i_0}) - f(s)| \leq$$
$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

IDEA

- DE LA DEFINICIÓN DE EQUICONTINUIDAD FIJADO $x \in K$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_x > 0$ TAL QUE $dist(x,y) < \delta_x$ ENTONCES $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$
- POR OTRA PARTE $\{ B_x(\frac{\delta_x}{4}) \}_{x \in K}$ ES UN RECUBRIMIENTO ABIERTO DE K

5º) ENCONTRAR UN EJEMPLO QUE MUESTRE QUE $(C[0,1] \; \|\;\|_1)$ NO ES COMPLETO

SEA $f_n(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{SI } x > \frac{1}{2n\pi} \\ 0 & \text{SI } x \in [0, \frac{1}{2n\pi}] \end{cases}$

COMO $f_n(\frac{1}{2n\pi}) = \operatorname{sen} 2n\pi = 0$, f_n ES CONTINUA Y $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq C[0,1]$.

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|\,dt \underset{\substack{n>m \text{ Y POR TANTO} \\ \frac{1}{2n\pi} < \frac{1}{2m\pi}}}{=}$$

$$= \int_{\frac{1}{2n\pi}}^{\frac{1}{2m\pi}} |f_n(t) - f_m(t)|\,dt =$$

$$= \int_{\frac{1}{2n\pi}}^{\frac{1}{2m\pi}} |\operatorname{sen} \tfrac{1}{t}|\,dt \le \frac{1}{2m\pi} - \frac{1}{2n\pi} \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$

LO QUE PRUEBA QUE $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ES DE CAUCHY.

SI $f_n \xrightarrow{\|\;\|_1} f$ Y SI SUPONEMOS QUE EN $x_0 \in (0,1]$ $f(x_0) \neq \operatorname{sen}\frac{1}{x_0}$ Y $f \in C[0,1]$

SEA $\varepsilon = |f(x_0) - \operatorname{sen}\frac{1}{x_0}| > 0$, COMO $f(x) - \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ ES CONTINUA EN $(0,1]$ $\exists \delta > 0$ TAL QUE $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (0,1] \Rightarrow |f(x) - \operatorname{sen}\frac{1}{x}| > \varepsilon/2$.

AHORA SEA n_0 TAL QUE $\frac{1}{2n_0\pi} < x_0 - \delta$, ASI $\forall m > n_0$

$$\|f_m - f\|_1 = \int_0^1 |f_m(t) - f(t)|\,dt \underset{|f_m - f| \ge 0}{\ge} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(t) - \operatorname{sen}\tfrac{1}{t}|\,dt \ge$$

$$\ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varepsilon/2 \,dt = \delta\varepsilon > 0,$$ ESTO CONTRADICE QUE $f_n \xrightarrow{\|\;\|_1} f \iff \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; ASI $f(t) = \operatorname{sen}\frac{1}{t}$ $\forall t > 0$.

PERO ESTA FUNCIÓN f NO ES CONTINUA EN NINGÚN CASO EN $t=0$.

LUEGO $f \notin C[0,1]$; ASÍ $(C[0,1] \; \|\;\|_1)$ NO ES COMPLETO.

IDEA

SEA $f_n(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{SI } x > \frac{1}{2n\pi} \\ 0 & \text{SI } x \in [0, \frac{1}{2n\pi}] \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

1º) VER QUE (f_n) ES DE CAUCHY EN $(C[0,1] \; \|\;\|_1)$

2º) SI SE SUPONE QUE $f_n \xrightarrow{\|\;\|_1} f$ (*) PROBAR POR REDUCCIÓN AL ABSURDO QUE $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ $\forall x \neq 0$

Y DEDUCIR QUE (*) NO SE PUEDE DAR EN $C[0,1]$ YA QUE $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ NO ES CONTINUA EN SOBRE $[0,1]$.