PRÁCTICA 9ª

NOMBRE Y APELLIDOS ....

1º) SEA $(\ell_\infty \, \| \; \|_\infty)$. PROBAR QUE ESTE ESPACIO NORMADO ES COMPLETO

IDEA

- TOMAR $(x^m)_{m=1}^{\infty} \subseteq \ell_\infty$

$x^m = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m \dots) \in \ell_\infty$

CON $\sum_{m=1}^{\infty} \|x^m\|_\infty < \infty$.

1º] SEA $y = (y_1, y_2 \dots y_n \dots)$

$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_n^m$

PROBAR QUE $y \in \ell_\infty$

2º] PROBAR QUE

$\| \sum_{m=1}^{N} x^m - y \|_\infty \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

3º] DEDUCIR QUE

$(\ell_\infty, \| \; \|_\infty)$ ES COMPLETO.

SEA $(x^m)_{m=1}^{\infty} \subseteq \ell_\infty$ UNA SUCESIÓN EN ℓ_∞ CON $\sum_{m=1}^{\infty} \|x^m\|_\infty < \infty$

SI $x^m = (x_1^m, x_2^m \dots x_n^m \dots \quad)$

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{m=1}^{\infty} |x_n^m| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|x^m\|_\infty < \infty$

ASÍ COMO K ES COMPLETO $\exists$

$$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_n^m \quad y \quad |y_n| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|x^m\|_\infty$$

ASÍ $y = (y_1 \, y_2 \quad \cdot \, y_n \; \dots) \in \ell_\infty$

CON $\|y\|_\infty \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|x^m\|_\infty < \infty$

AHORA $\| \sum_{m=1}^{N} x^m - y \|_\infty =$

$$\sup_n \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} x_n^m \right| \leq \sup_n \sum_{m=N+1}^{\infty} \|x^m\|_\infty = \sum_{m=N+1}^{\infty} \|x^m\|_\infty \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

LO QUE PRUEBA QUE $y = \sum_{m=1}^{\infty} x^m$, POR LA CARACTERIZACIÓN DE LA COMPLETITUD DE ESPACIOS NORMADOS POR SERIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES, SE SIGUE QUE ℓ_∞ ES COMPLETO

2: PROBAR QUE $(\ell_\infty \; \|\;\|_\infty)$ NO ES SEPARABLE

SEA $X^m = (X_1^m, X_2^m, \dots X_n^m \dots) \in \ell_\infty$
$m = 1, 2, \dots$ UNA SUCESIÓN EL ℓ_∞

SEA $Y = (Y_1 Y_2 \dots Y_m \quad)$ CON

$$Y_m = \begin{cases} |X_m^m| + 1 & \text{SI } |X_m^m| < 1 \\ 0 & \text{SI } |X_m^m| > 1 \end{cases}$$

ASI $\|Y\|_\infty = \sup_m |Y_m| \leq 2$, LUEGO $Y \in \ell_\infty$ Y NO ES CIERTO QUE $\overline{\{X^m\}_{m=1}^\infty} = \ell_\infty$ YA QUE $\|X^m - Y\| \geq |X_m^m - Y_m| > 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

IDEA

SEA $X = (X_1, X_2, \dots X_n \dots) \in \ell_\infty$
Y SEA $Y = (Y_1, Y_2 \dots Y_n \dots)$
CON $Y_{n_0} = |X_{n_0}| + 1$, ENTONCES
$\|X - Y\|_\infty \geq 1$.

3: SEA $(C_0 \; \|\;\|_\infty)$

3₁: PROBAR QUE $(C_0 \; \|\;\|_\infty)$ ES UN ESPACIO DE BANACH.

LA SUMA DE SUCESIONES CONVERGENTES ES CONVERGENTE Y SI $\lambda \in \mathbb{K}$ Y MULTIPLICA A UNA SERIE CONVERGENTE EL RESULTADO CONVERGENTE. ASI C_0 ES UN SUBESPACIO VECTORIAL DEL ESPACIO DE BANACH ℓ_∞

SEA $(X^m) \subseteq C_0$ Y $X^m \xrightarrow{\|\;\|_\infty} X \in \ell_\infty$, SI $X \notin C_0$ $\exists \varepsilon > 0$ Y $\exists (n_k)$ CON $|X_{n_k}| > \varepsilon$. PARA $\varepsilon/2$ $\exists n_0 : m \geq n_0$ $|X_{n_k}^m - X_{n_k}| \leq \|X^m - X\|_\infty < \varepsilon/2$
$\Rightarrow |X_{n_k}^m| > \varepsilon/2 \quad \forall k$ LUEGO $X^m \notin C_0$. $\forall m \geq n_0$ (CONTRADICCIÓN)
LUEGO C_0 ES CERRADO EN ℓ_∞. ASI TODA SUCESIÓN DE CAUCHY EN C_0 ES CONVERGENTE EN C_0

IDEA

¿ES C_0 UN SUBESPACIO VECTORIAL CERRADO DE ℓ_∞?

3₂: PROBAR QUE $(C_0, \|\;\|_\infty)$ ES SEPARABLE

SEA $e_n = (0 \dots 0, \underset{n}{1}, 0, \dots) \quad n \in \mathbb{N}$

SI VEMOS QUE $\overline{[e_n]} = C_0$, SE TENDRÁ QUE C_0 ES SEPARABLE.

SEA $X = (X_1 \dots X_n \dots) \in C_0$ DADO $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 : n \geq n_0$
$|X_n| < \varepsilon$, ASI $\left\| X - \sum_{k=1}^{n_0} X_k e_k \right\|_\infty = \sup_{n \geq n_0} |X_n| < \varepsilon$

LUEGO $C_0 = \overline{[e_n]}$.

IDEA

SEA $e_n = (0 \dots \underset{n}{1} \dots 0) \in C_0$
VER QUE
$\overline{[e_n]} = C_0$.

4º SEA $(X, \| \ \|)$ UN ESPACIO DE BANACH.
SEA $A \subseteq X$, DE MODO QUE $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_1 x_2 \dots x_s \in X$
CON $A \subseteq \{x_1, x_2 \dots x_s\} + \varepsilon B_X$. PROBAR
QUE A ES PRECOMPACTO (E.D. $\overline{A}$ ES COMPACTO)

SEA $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$
PARA $K=1$ Y $\varepsilon_1 = 1$ $\exists \{x_1 x_2 \dots x_{s_{\varepsilon_1}}\} \in X$ CON

$$\{x_1 x_2 \dots x_{s_{\varepsilon_1}}\} + B_X \ni \{y_n\}.$$

ASI $\exists s_1 \in \{x_1 x_2 \dots x_{\varepsilon_1}\}$ Y UNA SUBSUCESION

$$(y_{n,1}) = (y_{1,1}, y_{2,1} \dots y_{n,1} \dots) \subseteq B_{s_1}(1)$$

PARA ESTA SUCESION Y $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists s_2 \in X$
Y UNA SUBSUCESION

$$(y_{n,2}) = (y_{1,2}, y_{2,2}, \dots y_{n,2} \dots) \subseteq B_{s_2}(1/2)$$

PROCEDIENDO DE ESTE MODO

$\vdots$

PARA $\varepsilon = 1/k$ $\exists s_k \in X$ Y UNA SUBSUCESION DE $(y_{n,k-1})$

$$(y_{n,k}) = (y_{1,k}, y_{2,k} \dots y_{n,k} \dots) \subseteq B_{s_k}(1/k)$$

AHORA TOMAMOS LA SUCESIÓN $(y_{n,n})_{n=1}^{\infty}$ (PROCESO DE DIAGONALIZACIÓN DE CANTOR). ESTA SUCESIÓN ES DE CAUCHY YA QUE

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ CON $\frac{1}{n_0} < \varepsilon/2$ Y TAL QUE $\forall n_0$

$$y_{n,n} \in B_{s_{n_0}}\left(\tfrac{1}{n_0}\right); \quad \text{ASI } \forall n, m \geq n_0$$

$$\| y_{m,m} - y_{n,n} \| \leq \| y_{m,m} - s_{n_0} \| + \| s_{n_0} - y_{n,n} \| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

LA SUBSUCESION $(y_{n,n})_{n=1}^{\infty}$ ES CONVERGENTE POR SER X BANACH.
POR LA CARACTERIZACIÓN DE LA COMPACIDAD POR SUCESIONES
A ES PRECOMPACTO

IDEA
- TOMAR $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$.
PARA $k \in \mathbb{N}$, SI $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$
SE PUEDE ENCONTRAR $s_k \in X$ Y UNA SUBSUCESIÓN $(y_{n,k})_{n=1}^{\infty} \subseteq B_{s_k}(\frac{1}{k})$
USAR LO ANTERIOR PARA PRODUCIR UN PROCESO DE DIAGONALIZACIÓN DE CANTOR. EL CUAL, NOS LLEVA A UNA SUBSUCESIÓN DE CAUCHY.

5: SEA $K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA

Y SEA $T : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$

$$f \longrightarrow Tf(s) = \int_0^1 K(s,t)\, f(t)\, dt.$$

5.1: PROBAR QUE T ES UN OPERADOR BIEN DEFINIDO

IDEA

SI $f \in C[0,1]$ ¿$\Rightarrow Tf \in C[0,1]$?

USAR QUE K ES UNIFORMEMENTE CONTINUA ¿POR QUÉ?

K ES CONTINUA SOBRE UN COMPACTO $[0,1]\times[0,1]$ LUEGO K ES UNIFORMEMENTE CONTINUA, ASÍ $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : |(s,t)-(s',t')| < \delta \Rightarrow$

$$|K(s,t) - K(s',t')| < \varepsilon.$$

SEA $\varepsilon>0$ Y PARA EL δ ANTERIOR

SI $|s-s'| < \delta$, $s, s' \in [0,1] \Rightarrow$

$$|Tf(s) - Tf(s')| = \left|\int_0^1 \left(K(s,t) - K(s',t)\right) f(t)\, dt\right| \leq$$

$$\leq \int_0^1 |K(s,t) - K(s',t)|\,|f(t)|\, dt \leq \int_0^1 \varepsilon \|f\|_\infty\, dt \leq \varepsilon \|f\|_\infty$$

LUEGO Tf ES UNIFORMEMENTE CONTINUA, POR TANTO CONTINUA SOBRE $[0,1]$

5.2: PROBAR QUE T ES UN OPERADOR LINEAL

$$T(f+g)(s) = \int_0^1 K(s,t)(f+g)(t)\, dt = \int_0^1 K(s,t) f(t)\, dt + \int_0^1 K(s,t) g(t)\, dt$$

SI $\lambda \in \mathbb{R}$: $T(\lambda f)(s) = \int_0^1 K(s,t) \lambda f(t)\, dt = \lambda \int_0^1 K(s,t) f(t)\, dt.$

LUEGO T ES UN OPERADOR LINEAL

5.3: PROBAR QUE $T : (C[0,1], \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ES UN OPERADOR CONTINUO

IDEA

USAR LAS ACOTACIONES DE 5.1.

POR 5.1: $|Tf(s)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |K(s,t)|\, dt$

K CONTINUA SOBRE UN COMPACTO LUEGO $\exists M>0$ TAL QUE $|K(s,t)| < M \quad \forall (s,t) \in [0,1]\times[0,1]$

Y ASÍ $|Tf(s)| \leq \|f\|_\infty M. \Rightarrow \|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty M.$

SEA AHORA $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \qquad \|Tf_n - Tf\|_\infty \underset{(5.2)}{=} \|T(f_n - f)\|_\infty \leq$

$\leq \|f_n - f\|_\infty M \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. LUEGO T ES CONTINUA