NÚMEROS NATURALES. INDUCCIÓN. . . . . . .

1º] A] 1) $A = \{2n : n \geq 5\} = \{10, 12, 14, \ldots\}$

$\min A = 10$; A no está acotado

2) $A = \{2k^2+7 : 8 \geq k \geq 2\} =$

$= \{2\times 2^2+7,\ 2\times 3^2+7,\ 2\times 4^2+7 \ldots,\ 2\times 8^2+7\}$

$\min A = 2\times 2^2+7 = 15$ $\quad$ $\text{máx } A = 2\times 8^2+7 = 135.$

B] $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$. $\quad 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{1} = 1$

Luego 1 es el elemento mayor. Ahora $\forall n \in \mathbb{N}$

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ Luego no existe un elemento que sea el más chico

2º] a) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ $\quad$ CIERTA.

Por inducción.

Para $n = 1$ $\quad (x+y)^1 = 1\cdot x^{1-0}y^0 + 1\, x^{1-1}y^1$

$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \forall n.$

Supuesta cierta la igualdad para n.

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n = x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k + y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

$$= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{(n+1)-k}y^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k + y^{n+1}.$$

$$= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]x^{n+1-k}y^k + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k .$$

$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

3:
$$(x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-(k+1)}y^k\right) = \qquad n \geq 2$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k}y^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-(k+1)}y^{k+1} =$$

$$= x^n + \sum_{\boxed{k=1}}^{n-1} x^{n-k}y^k - \sum_{k=0}^{\boxed{n-2}} x^{n-(k+1)}y^{k+1} - y^n.$$

$$= x^n + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} x^{n-k}y^k} - \cancel{\sum_{j=1}^{n-1} x^{n-j}y^j} - y^n = x^n - y^n.$$

4: a) Si $n=1$ $\quad A=\{*\}$ $\quad \operatorname{Card} A = 1$

(B subconjunto) =

$PA = \{B \subseteq A : B \text{ subconjunto}\} \Rightarrow \operatorname{Card} PA = 2^1 = 2.$

$= \{\phi, \{*\}\}.$

Supuesto cierto para n.

Si $A = \{*_1, \quad , *_{n+1}\} = \{*_1 \cdots *_n\} \cup \{*_{n+1}\}.$

Luego $PA = \underbrace{\{B \subseteq A : *_{n+1} \in B\}}_{A_1} \cup \underbrace{\{C \subseteq A : *_{n+1} \notin C\}}_{A_2}.$ y así

claramente $A_1 \cap A_2 = \phi$

$\operatorname{Card} PA = \operatorname{Card} A_1 + \operatorname{Card} A_2 \overset{(\bullet)}{=} 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$

(•) Observemos que $A - \{*_{n+1}\}$ tiene n elementos y que por tanto A_2 tiene 2^n elementos. A_1 tiene 2^n " .

pero también

c) $$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

para $n=1$ $\quad \sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 = 1 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$

supuesto cierto para n.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + n+1\right] =$$
$$= (n+1)^2\left[\frac{n^2+4n+4}{4}\right] = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}\right)^2$$

4:] e) $1+r+r^2+ \quad +r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ $\quad r\neq 1$

PARA $n=1$ $\quad \sum_{k=0}^{1} r^k = 1+r = \frac{1-r^{1+1}}{1-r} = \frac{(1+r)(\cancel{1-r})}{(\cancel{1-r})}$

SUPONGO CIERTA PARA n.

$$\sum_{k=0}^{n+1} r^k = \sum_{k=0}^{n} r^k + r^{n+1} \underset{\downarrow}{=} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} + r^{n+1} = \frac{1-\cancel{r^{n+1}}+\cancel{r^{n+1}}-r^{n+2}}{1-r}$$

HIPOTESIS INDUCCION

O TAMBIEN $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k \quad$ y $\quad rS_n = r\sum_{k=0}^{n} r^k = \sum_{k=0}^{n} r^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} r^k + r^{n+1}$

Y ASI $\quad S_n - rS_n = (1-r)S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k - \sum_{k=1}^{n} r^k - r^{n+1} =$

$= 1 - r^{n+1}.$

DESPEJANDO $\quad S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$

5:] a) ¿ $9 \mid 2^{2n}+15n-1$?

EN PRIMER LUGAR VEAMOS QUE $\quad 3 \mid 2^{2n}+5 \quad \forall n \geq 1$

POR INDUCCION: SI $n=1$ $\quad 3 \mid 2^2+5=9$

SI PARA n ES CIERTA

PARA $\quad 2^{2(n+1)}+5 = 2^{2n+2}+5 = 4\,2^{2n}+5 =$

$= (2^{2n}+5) + 3\,2^{2n}$

COMO $\quad 3 \mid 2^{2n}+5 \quad$ POR HIPOTESIS DE INDUCCION

ENTONCES $\quad 3 \mid 2^{2n}+5+3\,2^{2n}.$

AHORA PARA $n=1$ $\quad 9 \mid 2^2+15-1 = 18.$ ENTONCES

SI SUPONEMOS QUE $\quad 9 \mid 2^{2n}+15n-1,$

$2^{2(n+1)}+15(n+1)-1 = 2^{2n}\cdot 4 + 15n+15-1 =$

$= (2^{2n}+15n-1) + 3\,2^{2n} + 3\,5 = 3(2^{2n}+5)$

COMO $\quad 3 \mid 2^{2n}+5 \quad \forall n \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9 \mid 2^{2n}+15n-1 \\ \text{y} \\ 9 \mid 3(2^{n}+5). \end{array} \right.$

6º) SEAN p y n ELEMENTOS DE IN.

a) n^2 ES PAR $\Longleftrightarrow$ n ES PAR

CIERTO YA QUE SI $n = 2k+1 \Rightarrow (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$. IMPAR.

b) $(n+p)^2$ ES PAR $\Longleftrightarrow$ $(n-p)^2$ ES PAR.

CIERTO YA QUE $(n+p)^2$ PAR $\underset{a)}{\Longleftrightarrow}$ $n+p$ PAR $\Longleftrightarrow$ $n-p$ ES PAR $\underset{a)}{\Longleftrightarrow}$ $(n-p)^2$ PAR

$\Longleftrightarrow$ $n-p+2p$ PAR $\Longleftrightarrow$ $n-p$ ES PAR
2p PAR

c) SI np ES IMPAR, ENTONCES $n+p$ ES PAR

CIERTO np IMPAR $\Longleftrightarrow$ n y p IMPARES $\Rightarrow$ $n+p$ PAR

($\not\Leftarrow$ n, p PAR, $n+p$ PAR)

d) SI n^2+np+p^2 ES PAR, ENTONCES np ES PAR.

np PAR $\Longleftrightarrow$ n o p o n y p SON PARES

EL CASO n o p IMPAR y EL OTRO PAR, POR EJEMPLO n PAR p IMPAR

n^2+np PAR
y p^2 IMPAR | LUEGO n^2+np+p^2 IMPAR.

EL CASO n y p IMPARES $\Rightarrow$ n^2, np y p^2 IMPARES $\Rightarrow$ n^2+np+p^2 IMPAR

LUEGO ES CIERTA LA AFIRMACIÓN.

e) n^2+np+p^2 PAR, ENTONCES n y p SON PARES.

ES CIERTA, VER EL CASO ANTERIOR.

7:) ¿ $\forall\, n > 7 \Rightarrow \exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ TAL QUE

$$n = 3k_1 + 5k_2 \; ?$$

CON $k_2 \geqslant 2$

SEA $n > 7$ $\quad \begin{array}{l|l} n & 3 \\ \hline r & k_2 \end{array}$ $\quad n = 3k_1 + r$

ASÍ SI $r = 0$ $\quad n = 3k_1$ Y HEMOS TERMINADO

SI $r = 2$ $\quad n = 3k_1 + 2 = 3(k_1 - 1) + 3 + 2 = 3(k_1 - 1) + 5.$

SI $r = 1$ $\quad n = 3k_1 + 1$ $\quad$ COMO $n > 7 \Rightarrow k_1 \geqslant 3$

ASÍ $n = 3k_1 + 1 = 3(k_1 - 3) + 9 + 1 =$

$= 3(k_1 - 3) + 2 \times 5.$

8:) ¿ $n^2 + n + 1 \leq 2^n - 3$? $\quad$ PARA $n = 1$, $n = 2$ $n = 3$ NO ES CIERTO

PARA $n = 6$ $\quad 6^2 + 6 + 1 = 43 \leq 2^6 - 3 = 61.$ ES CIERTO

AHORA SI $n \geqslant 6$ Y SUPONEMOS CIERTO PARA n.

$$(n+1)^2 + (n+1) + 1 = \left(n^2 + n + 1\right) + 2n + 1 + 1$$

$$n^2 + n + 1 \leq 2^n - 3$$

$$\text{Y} \quad 2n + 2 = 2(n+1) \leq 2^n \qquad n \geqslant 3$$

LUEGO $(n+1)^2 + (n+1) + 1 \leq 2^n - 3 + 2^n = 2^{n+1} - 3.$

9:) a) $1 + n/2 \leq \underbrace{1 + 1/2 + \frac{1}{3} + \ldots + 1/2^n}_{(\bullet)} \leq n + 1$

$$1 + \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{2^j - 1} \frac{1}{2^j + k} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{2^j - 1} \frac{1}{2^j} = 1 + n.$$

POR OTRO LADO PARA $n = 1$ $\quad 1 + 1/2 \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1.$

SUPONGO CIERTO PARA n.

$$1 + \frac{n+1}{2} = 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \leq 1 + \frac{1}{2} + \quad + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

YA QUE $1 + n/2 \leq 1 + \quad + \frac{1}{2^n}$ Y $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + k} \geqslant \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$

(•) ÚTIL PARA VER QUE LA SERIE ARMÓNICA NO ES CONVERGENTE

VI

9: b) $(1+a)^n = \underset{\downarrow}{\sum_{k=0}^{n}} \binom{n}{k} a^k \underset{\downarrow}{\geq} \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k = 1 + na$

BINOMIO DE NEWTON $a>0$

d) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

PARA $n=1$ $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1}$ CIERTO

SUPUESTO CIERTO PARA n

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 3} + \quad + \frac{1}{n(n+1)}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \underbrace{\frac{n}{n+1}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$$

10: r_1 RECTA DEL PLANO $ax+by+c=0$

r_1 y r_2 PARALELAS $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \lambda \neq 0$ TAL QUE $(a,b) = \lambda(a',b')$

r_2 $a'x + b'x + c$

REFLEXIVA $\lambda = 1$

SIMÉTRICA $(a,b) = \lambda(a',b') \Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda}(a,b) = (a',b')$

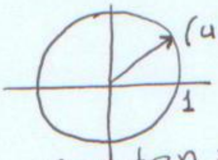
TRANSITIVA SI $(a,b) = \lambda(a',b')$ y $(a',b') = \beta(a'',b'')$

$\Rightarrow (a,b) = \lambda\beta(a'',b'')$

OBSERVEMOS QUE SI $(a,b) = \lambda(a',b')$ y $b \neq 0$ $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

O SI $a \neq 0$ $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$

CLASES DE EQUIVALENCIAS



CONJUNTO COCIENTE EL CÍRCULO CENTRADO EN EL CERO

11: $P(X) = \{A \subseteq X\}$

- ARA YA QUE $A \subseteq A$ REFLEXIVA
- SI $A \subseteq B$ y $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ ANTISIMÉTRICA
- SI $A \subseteq B$ y $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ TRANSITIVA

ESTAMOS ANTE UN ORDEN, SOLO PARCIAL YA QUE SI Card $X \geq 2$ SEA $a \in X$ y SEA $\{a\}$ y $\{a\}^c$. COMPLEMENTARIO

$\{a\} \nsubseteq \{a\}^c$ y $\{a\}^c \nsubseteq \{a\}$.

VII

13:] UN CONJUNTO A CON UN ORDEN "$\leq$" ESTÁ BIEN ORDENADO SI $\forall\, B \subseteq A,\ B \neq \emptyset$ EXISTE m = MÍNIMO B.

SEA $n, m \in A$, COMO $B = \{n, m\} \subseteq A$ Y $B \neq \emptyset$ EXISTE n ó m MÍNIMO DE B, LUEGO $n \leq m$ O BIEN $m \leq n$. ASÍ VEMOS QUE A ESTÁ TOTALMENTE ORDENADO

EL RECÍPROCO NO ES CIERTO. SEA $(\mathbb{Z}\ \leq)$ ESTÁ TOTALMENTE ORDENADO PERO NO TIENE MÍNIMO $\{n \leq 0\} \subseteq \mathbb{Z}$

14:] $(P(\{a,b\})\ \leq)$ CON $P_1 \leq P_2 \overset{\text{DEF}}{\iff} P_1 \subseteq P_2$

ESTO ES UN ORDEN PARCIAL, LA PRUEBA ES COMO EN EL EJERCICIO 11: CLARO NO ES UN ORDEN TOTAL

AHORA SI $P_1\ P_2 \in P(\{a,b\})$ CLARAMENTE $P_3 = P_1 \cup P_2$

$$\underbrace{P_3 \in P(\{a,b\}) \text{ Y } P_1 \leq P_3 \text{ Y } P_2 \leq P_3}$$

ESTO SERÁ MUY ÚTIL AL DEFINIR LA INTEGRAL DE RIEMANN.