NÚMEROS NATURALES. INDUCCIÓN. CONJUNTOS ORDENADOS.

1.- A) Encuentra el número más pequeño de los siguientes conjuntos de números naturales:
1) $A = \{2n : n \geq 5\}$ 2) $\{2k^2 + 7 \ : 8 \geq k \geq 2\}$
¿Cuál es el elemento más grande en cada conjunto?

B) Observa el subconjunto de números racionales $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}\}$. ¿En este subconjunto existe un elemento que es el más pequeño de todos? ¿Existe alguno que sea el más grande?

2.- ¿Cuál de las siguientes igualdades **no** es cierta?

a) $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ b) $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} x^k$

c) $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} y^{n-k} x^k$ d) $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!} y^{n+1-k} x^{k-1}$.

3.- Prueba que si $n \geq 2$ y x e y son números reales entonces se verifica que:

$$x^n - y^n = (x-y)\Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-(k+1)} y^k\Big).$$

4.- Resuelve las siguientes preguntas por inducción:

a) ¿Un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos?

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.

d) Si $n \geq 4$, entonces $2^n \geq n^2$ (ver antes que $2n^2 \geq (n+1)^2$ para n mayor o igual a 4).

e) $1 + r + r^2 + ... + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$, si $r \neq 1$ (para $r = 1$ la suma no presenta problemas). Además de la inducción, dedude la igualdad anterior escribiendo $S = 1^+ r + r^2 + ... + r^n$, multiplica rS y y despeja S de estas dos ecuaciones.

5.- Prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) $2^{2n} + 15n - 1$ es múltiplo de 9 b) $5^n - 1$ es múltiplo de 4

c) $7^n - 6n - 1$ es múltiplo de 36 d) $n^5 - n$ es múltiplo de 5

e) $2^{2n+1} + 1$ es múltiplo de 3 f) $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ es múltiplo de 21 .

6.- Algunas de estas afirmaciones son ciertas otras falsas. Decide de que tipo es cada una de ellas y justifica tu respuesta.

Para cuálesquiera enteros positivos p y n se tiene que:

a) n^2 es par si y solo n es par.

b) $(n+p)^2$ es par si y solamente si $(n-p)^2$ es par.

c) Si np es impar, entonces $n+p$ es par.

d) Si $n^2 + np + p^2$ es par, entonces np es par.

e) Si $n^2 + np + p^2$ es par, entonces n y p son pares.

7.- Demuestra que cualquier número de botellas mayor que 7 se puede envasar en cajas con capacidad para 3 y 5 botellas.

8.- ¿ Qué números natural verifican que $n^2 + n + 1 \leq 2^n - 3$?

9.- Prueba por inducción las siguientes igualdades y desigualdades, siendo en todos los casos $n \in \mathbb{N}$:

a) $1 + (n/2) \leq 1 + (1/2) + (1/3) + ... + (1/2^n) \leq n + 1$.

b) $(1 + a)^n \geq 1 + an$, para $a > 0$.

c) $2^{2n} > n^2$.

d) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

e) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} + ... + \dfrac{1}{4n^2 - 1} = \dfrac{n}{2n+1}$

10.- Sobre el conjunto de rectas del plano $\mathbb{R}^2$ se define la relación ser paralelas (e.d. dos rectas r y s están relacionadas si y solo si son paralelas). Prueba que esta relación es de equivalencia. ¿Como son las clases de equivalencia? ¿Y el conjunto cociente asociado?

11.- Sea X un conjunto. Se considera $P(X)$ el conjunto de partes de X. Sobre $P(X)$ se define la relación R del siguiente modo: $A, B \in P(X)$ están relacionados si $A \subset B$ (ARB). Prueba que ésta es una relación de orden. ¿El orden generado es total o parcial?

12.- Sea $f : A \to B$ una aplicación. Se define la relación R sobre A del siguiente modo: $x, y \in A$ están relacionados xRy si y solo si $f(x) = f(y)$. Prueba que ésta es una relación de equivalencia. Describe los elementos del espacio cociente asociado.

13.- Prueba que si A está bien ordenado, entonces A está totalmente ordenado. ¿Es cierto el recíproco?

14.- Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Se define el conjunto de particiones de $[a, b]$ por:

$$P([a,b]) = \{\, P = \{\, t_0 = a < t_1 < t_2 < ... < t_n = b \,\} \;:\; t_0, t_1, ..., t_n \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Sobre $P([a,b])$ se define la relación "$\leq$" siguiente: $P_1 \leq P_2$ si y solo si $P_1 \subset P_2$ donde $P_1, P_2 \in P([a,b])$. Prueba que "$\leq$" es una relación de orden. ¿Es un orden total o parcial? Prueba que para todo par $P_1, P_2 \in P([a,b])$ se puede encontrar otra partición $P_3 \in P([a,b])$ de modo que $P_1 \leq P_3$ y también $P_2 \leq P_3$.