PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

1:] ¿ $\exists\, r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = 3$?

Si existiese $r = \frac{p}{q}$ p, q sin divisores comunes

y $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 3 \Rightarrow p^2 = 3q^2$ así 3 divide a p^2

y por tanto 3 divide a p. (Si $p = 3k + s$ con $s = 1$ o 2, entonces $p^2 = 3k^2 + 6ks + s^2$ con $s^2 = 1$ ó 4, luego 3 no dividiría a p^2)

Así $p = 3k$ y $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{9k^2}{q^2} = 3$

luego $3k^2 = q^2$, así 3 divide a q^2 y por tanto 3 " a q.

Llegamos a contradicción ya que p y q no tienen divisores comunes.

2:] ¿ $\exists\, r \in \mathbb{Q}$ tal que $r^2 = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$ s_l impar?

Si existiese $r = \frac{p}{q}$ p, q sin divisores comunes.

con $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k} \Rightarrow$ $p = t_1^{r_1} \cdots t_l^{r_l}$ $t_1 \ldots t_l$ primos y $r_1 \ldots r_l$ con

$$t_1^{2r_1} \cdots t_l^{2r_l} = q^2 \cdot p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k}$$

En la descomposición de q no hay ningún t_j $j = 1 \ldots l$.

Los $p_l^{s_l}$ s_l son impares y los $2r_j$ son pares. Así por la unicidad de la descomposición en potencias de primos (teorema fundamental de la aritmética) p^2 no puede ser igual a tal expresión.

PROBLEMA 3:] $x, y \in \mathbb{Q}$ y $\sqrt{x}+\sqrt{y} \in \mathbb{Q}$

¿$\Rightarrow \sqrt{x}, \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$?

1:] SI $\sqrt{x}+\sqrt{y} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x}\sqrt{y} \in \mathbb{Q}$.

SEA $r = \sqrt{x}+\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{x} = r - \sqrt{y}$

LUEGO $\sqrt{x}\sqrt{y} = (r-\sqrt{y})\sqrt{y} = r\sqrt{y} - y \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$. ; Y POR TANTO, TAMBIEN $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$.

PROBLEMA 4:] $p \in \mathbb{Q}$, $p \neq 0$ Y SEA $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

¿$p+x$, $px \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$? CLARO, SI NO

$(p+x) - p = x \in \mathbb{Q}$

Y $p \cdot x \cdot p^{-1} = x \in \mathbb{Q}$ } LO CUAL ES CONTRADICTORIO

PROBLEMA 5:] POR EL PROBLEMA 3 SI $\sqrt{2}-\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \sqrt{2}, \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ LO CUAL SABEMOS QUE NO ES POSIBLE

POR OTRO LADO $1 - \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = r \in \mathbb{R}$

ASI $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = 1 - r$ Y $2+\sqrt{5} = (1-r)^3 = 1 - 3r + 3r^2 - r^3$

Y ASI $\sqrt{5} = -r^3 + 3r^2 - 3r - 1$.

Y $0 = (-r^3 + 3r^2 - 3r - 1)^2 - 5$.

LUEGO r ES SOLUCIÓN DEL POLINOMIO DE ARRIBA CON COEFICIENTES EN $\mathbb{Z}$.

PROBLEMA 6:] a) y b) USAR $-x$ (OPUESTO DE x)

c) USAR $-y$

d) $x + (-x) = 0$ LUEGO $-(-x) = x$.

PROBLEMA 7:] a), b) y c) USAR $x^{-1} = \frac{1}{x}$ (INVERSO DE x)

d) $x \cdot x^{-1} = 1$ LUEGO $(x^{-1})^{-1} = x$.

PROBLEMA 8:] a) ¿$0x = 0$?

$0x = (0+0)x = 0x + 0x$.

AHORA $0x + (-0x) = 0x + 0x + (-0x) \Rightarrow 0 = 0x$.

b) $x \neq 0$ e $y \neq 0$ $\quad xy \cdot (x^{-1}y^{-1}) = 1$ LUEGO xy TIENE INVERSO, LUEGO NO PUEDE SER NULO

c) $xy + (-x)y = (x + (-x))y = 0y \underset{a)}{=} 0 \Rightarrow -(xy) = (-x)y$

DE LA MISMA FORMA $x(-y) = -(xy)$.

d) $(-x)y + (-x)(-y) = (-x)[y + (-y)] = (-x)0 \underset{a)}{=} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-x)y = -(-x)(-y)$. POR c) $-(-x)y$ ES xy, LUEGO $-(-x)y$ ES $(-x)(-y)$, Y HEMOS VISTO QUE

$(-x)(-y) = xy$.

PROBLEMA 9:] a) $x > 0$ SUMANDO $-x \Rightarrow 0 > -x$.

b) SI $x > 0$ e $y < z \Rightarrow xy < xz$ (PROPIEDAD DE CUERPO ORDENADO $\mathbb{R}$)

c) SI $x < 0$ e $y < z$ ¿$\Rightarrow xy > xz$?

CLARO $z - y > 0$ ASÍ $(z-y)x < (z-y)0 = 0$

LUEGO $zx - yz < 0 \Rightarrow zx < yz$.

d) $x \neq 0$ SI $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$

SI $x < 0 \underset{c)}{\Rightarrow} x \cdot x = x^2 > 0$.

e) $0 < x < y \underset{y^{-1}>0}{\Rightarrow} 0 < xy^{-1} < y^{-1}y \underset{x^{-1}>0}{\Rightarrow} 0 < xy^{-1}x^{-1} < x^{-1}$.

PROBLEMA 11:) SEA $A \subseteq \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ TAL QUE $\exists \beta \in \mathbb{R}$ CON $\beta \leq a \ \forall a \in A$.

SEA $B = \{\beta \in \mathbb{R} : \beta$ COTA INFERIOR DE $A\}$. (CADA $a \in A$ ES UNA COTA SUPERIOR DE B)

$B \neq \emptyset$ Y ESTA ACOTADO SUPERIORMENTE

POR TANTO EXISTE $\sup B \underset{\text{def}}{=} \alpha$

VEAMOS QUE α ES EL INFIMO DE A (POR SER α SUPREMO).

1:) $\alpha \geq \beta \ \forall \beta \in B$

2:) SOLO HACE FALTA VER QUE α ES UNA COTA INFERIOR DE A. SI NO EXISTE

$a \in A$ CON $a \leq \alpha$

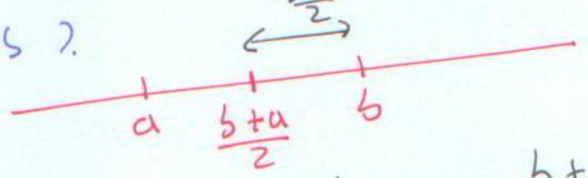
SI $a = \min A$ HEMOS TERMINADO. SEA $\varepsilon \in (0, \frac{\alpha - a'}{2})$

SI NO $\exists$ $a' < a \leq \alpha$ CON $a' \in A$. $\alpha - \varepsilon$ NO ES SUPREMO DE B, LUEGO

ENTONCES $\exists \beta \in B$ CON $a' \leq \alpha - \varepsilon < \beta < \alpha$ LO CUAL ES CONTRADICTORIO, ¡ $a' < \beta \Rightarrow \beta$ NO COTA INFERIOR DE A!

PROBLEMA 12:) SI $a \leq b$ Y $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a \leq b \leq a + \varepsilon$.

¿$\Longrightarrow a = b$? SI $a < b$



SI NO

ENTONCES $a < b - \frac{b-a}{2} = \frac{b+a}{2} < \frac{b+b}{2} = b$.

TOMANDO $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$, LLEGAMOS A CONTRADICCION

PROBLEMA 13:) A, B EN $\mathbb{R}$ ACOTADOS. ¿$\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}$

CLARO, SEA $c \in A \cup B \Longleftrightarrow \begin{cases} c \in A \Rightarrow c \leq \sup A \leq \max\{\sup A, \sup B\} \\ \text{ó} \\ c \in B \Rightarrow c \leq \sup B \leq \max\{\sup A, \sup B\} \end{cases}$

COTA SUPERIOR DE $A \cup B$.

LUEGO $\max\{\sup A, \sup B\}$ ES COTA DE A U DE B..

SI $\varepsilon > 0$ $\max\{\sup A, \sup B\} - \varepsilon$ O NO ES COTA DE A O DE B..

PROBLEMA 15:

α cota superior de A $(\Longleftrightarrow)$ $a \le \alpha \;\; \forall a \in A$

$a \le \alpha < t \;\; \forall a \in A \Rightarrow t \notin A$.

Luego si $t > \alpha$, $a \le \alpha \;\; \forall a \in A$

Si $t > \alpha$ verifica que $t \notin A \Rightarrow$

$\mathbb{R}$ está totalmente ordenado

PROBLEMA 17:

$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

a) ¿ $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$, entonces

Sea $a+b \in A+B$ con $a \in A$ y $b \in B$ $\Rightarrow a+b \le \sup A + \sup B$.

$a \le \sup A$ y $b \le \sup B$

Luego $\sup A + \sup B$ es cota superior de $A+B$.

Sea $\varepsilon > 0$, $\sup A - \varepsilon/2$ no es cota superior de A

$\Rightarrow \exists\, a' > \sup A - \varepsilon/2$.

$\sup B - \varepsilon/2$ no es cota superior de B

$\Rightarrow \exists\, b' > \sup B - \varepsilon/2$

Luego $a' + b' > \sup A + \sup B - \varepsilon$.

Luego no existe una cota superior de $A+B$ más chica que $\sup A + \sup B$.

c) $\inf A \le a \;\; \forall a \in A$; como $\alpha > 0$

$\forall a \in A$. Así $\forall\, \alpha a \in \alpha A$. ($\alpha \inf A$ cota inferior de αA)

$\alpha \inf A \le \alpha a$

Luego $\inf \alpha A = \alpha \inf A$.

Caso si no $\inf \alpha A > \alpha \inf A$. $\Rightarrow \exists\, \beta \in (\alpha \inf A, \inf \alpha A)$

$\beta \le \alpha a \;\; \forall a \in A$

Luego $\alpha \inf A < \beta \le \alpha a \;\; \forall a \in A$ lo que dice que

Luego $\inf A < \beta/\alpha \le a \;\; \forall a \in A$, más

$\inf A$ no es tal ínfimo ya que β/α, más grande, es cota inferior.

PROBLEMA 18:

a) $4 - x < 3 - 2x$ $\iff 1 < -x \iff \boxed{x < 1}$

OPERANDO CON DESIGUALDADES

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0 \iff \frac{1}{x} > \frac{1}{x-1}$

SI $x > 1$ $\quad x-1 > x \Rightarrow -1 > 0$!! NO ES POSIBLE

$\boxed{\text{SI } x \in (0,1)}$ $\quad 1 > \frac{x}{x-1} \iff x - 1 < x \iff -1 < 0$ CIERTO

SI $x < 0$ $\quad \frac{1}{x} > \frac{1}{x-1} \underset{\substack{x<0 \\ x-1<0}}{\iff} x - 1 > x \Rightarrow -1 > 0$!! NO ES POSIBLE

PROBLEMA 19: ¿$x < 0 \Rightarrow -x - \frac{1}{x} \geq 2$?

$-x - \frac{1}{x} \geq 2 \iff \frac{-x^2-1}{x} \geq 2 \underset{x<0}{\iff} -x^2 - 1 \leq 2x$

$\iff -(x^2 + 2x + 1) \leq 0$

$\iff -(x+1)^2 \leq 0$ LO CUAL ES CIERTO YA QUE $(x+1)^2 \geq 0$.

PROBLEMA 20: $-3 \leq |x| - 5 \leq 1$

SI $x \geq 0$ $\quad -3 \leq x - 5 \leq 1 \Rightarrow 2 \leq x \leq 6 \Rightarrow x \in [2,6]$

SI $x < 0$ $\quad -3 \leq -x - 5 \leq 1 \Rightarrow 2 \leq -x \leq 6 \Rightarrow x \in [-6,-2]$

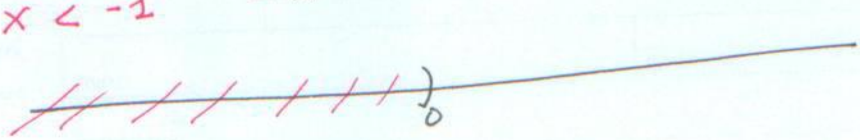
LUEGO $A = [-6,-2] \cup [2,6]$ Y ASÍ $\sup A = 6$.

PROBLEMA 21: b) $|x-1| > |x+1|$.

SI $x \geq 1$ $\quad x - 1 > x + 1 \Rightarrow -1 > 1$!! NO ES POSIBLE.

SI $x \in (-1,1)$ $\quad -x + 1 > x + 1 \Rightarrow 0 > 2x \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x \in (-1,0)$

SI $x < -1$ $\quad -x + 1 > -x - 1 \Rightarrow 1 > -1$ SIEMPRE CIERTO



$\boxed{\begin{array}{c} x < 0 \\ \text{SOLUCIÓN.} \end{array}}$