PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES.

1.- Prueba que no existe $r \in \mathbb{Q}$ de modo que $r^2 = 3$.

2.- Sea $n \in \mathbb{N}$ con una descomposición en factores primos dada por

$$n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} .... p_k^{s_k}$$

donde para algún $i \in \{1, 2, ..., k\}$ s_i es impar. Prueba que **no** existe $r \in \mathbb{Q}$ de modo que $r^2 = n$.

3.- Dados dos números $x, y \in \mathbb{Q}$ tales que $\sqrt{x} + \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$, prueba que $\sqrt{x}, \sqrt{y} \in \mathbb{Q}$.

4.-Sea $p \in \mathbb{Q}$, $p \neq 0$ y sea $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Prueba que $p + x$ y px son irracionales, es decir que pertenecen a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5.- Comprueba que $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ es irracional y que $1 - \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ es algebraico.

6.- Comprueba que las propiedades de la suma de $\mathbb{R}$ implica las siguientes propiedades :

a) Si $x + y = x + z$, entonces $y = z$.

b) Si $x + y = x$, entonces $y = 0$.

c) Si $x + y = 0$, entonces $x = -y$.

d) $-(-x) = x$.

7.- Comprueba que las propiedades del producto de $\mathbb{R}$ implica las siguientes propiedades :

a) Si $x \neq 0$ y $xy = xz$, entonces $y = z$.

b) Si $x \neq 0$ y $xy = x$, entonces $y = 1$.

c) Si $x \neq 0$ y $xy = 1$, entonces $y = 1/x$.

d) Si $x \neq 0$, entonces $x = 1/(1/x)$.

8.- De las propiedades de cuerpo de $\mathbb{R}$ comprueba que se deducen las siguientes propiedades para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}$:

a) $0x = 0$; b) Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$, entonces $xy \neq 0$.

c) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$; d) $(-x)(-y) = xy$.

9.- Usando que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado, coprueba que se verifican las siguientes propiedades:

a) Si $x > 0$, entonces $-x < 0$ y viceversa.

b) Si $x > 0$ e $y < z$, entonces $xy < xz$.

c) Si $x < 0$ e $y < z$, entonces $xy > xz$.

d) Si $x \neq 0$, entonces $x^2 > 0$. En particular $1 > 0$.

e) Si $0 < x < y$, entonces $0 < 1/y < 1/x$.

10.- Observa que las propiedades que se demuestran en los problemas **4,5,6** y **7** se verifican en todo cuerpo ordenado; en particular en $\mathbb{Q}$.

11.- Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado inferiormente. Prueba que existe $\inf A$ (Indicación: considerar B el conjunto de cotas inferiores de A).

12.- Si $a \leq b$ y para todo $\epsilon > 0$ se verifica que $a \leq b \leq a + \epsilon$, prueba que $a = b$. Del mismo modo prueba que si para todo $\epsilon > 0$ se verifica que $b - \epsilon \leq a \leq b$, entonces $a = b$.

13.- Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y sea α una cota superior de A. Comprueba que si $\alpha \in A$, entonces $\alpha = \sup A$.

14.- Si A y B son dos subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$, prueba que

$$\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\} \qquad \text{y} \qquad \inf A \cup B = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

15.-Sea A un subsconjuto no vacío de $\mathbb{R}$ y se $\alpha \in \mathbb{R}$. Prueba que α es cota superior de A si y solo si se verifica que si $t \in \mathbb{R}$ y $t > \alpha$ entonces $t \notin A$.

16.- Sea A un subconjunto no vacío y acotado de $\mathbb{R}$. Sea $A_0 \subset A$ con $A \neq \emptyset$. Prueba que A_0 está acotado y que

$$\inf A \leq \inf A_0 \leq \sup A_0 \leq \sup A.$$

17.- Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ dos conjuntos no vacíos y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Se definen los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A + B = \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; x = a + b \qquad \text{donde} \qquad a \in A \text{ y } b \in B \,\}$$

y

$$\alpha A = \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; x = \alpha a \qquad \text{donde} \qquad a \in A \,\}.$$

Prueba que:

a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ b) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

c) $\inf \alpha A = \alpha \inf A$ y $\sup \alpha A = \alpha \sup A$, si $\alpha > 0$.

d) $\inf \alpha A = \alpha \sup A$ y $\sup \alpha A = \alpha \inf A$, si $\alpha < 0$.

18.- Encuéntrese los números reales x tales que:

a) $4 - x < 3 - 2x$ b) $x^2 < 3x + 4$ c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1 - x} > 0$.

19.- Demuestra que para cualquier $x < 0$ se verifica que $-x - \frac{1}{x} \geq 2$.

20.- Sea $A = \{\, x \in \mathbb{R} \;:\; -3 \leq |x| - 5 \leq 1 \,\}$. El $\sup A$ es :

a) 6 b) 3 c) no existe d) 5

21.- Encuentra y representa sobre la recta real los número x que verifican:

a) $|x^2 - 1| \leq 3$ b) $|x - 1| > |x + 1|$.