NÚMEROS REALES

PROBLEMA 1:

a) $(2,3] \subseteq \mathbb{R}$ $\quad 2 = \inf(2,3]$, $2 \notin (2,3]$,
luego $(2,3]$ no tiene mínimo. (¡FALSO!)

b) ¡FALSO! Si $x<0$, x no tiene raíz cuadrada en $\mathbb{R}$.

c) $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad \big||x|-|y|\big| \le |x-y|$ CIERTO

DEM $\quad |x| = |x-y+y| \le |x-y| + |y|$ luego

$|x| - |y| \le |x-y|$.

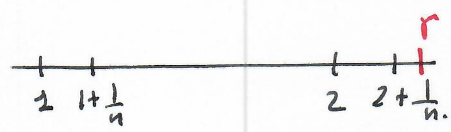
$|y| = |y-x+x| \le |y-x| + |x|$ luego

$|y| - |x| \le |y-x| = |x-y|$.

Por tanto $\quad \big||x|-|y|\big| = \left\{\begin{array}{c} |x|-|y| \\ ó \\ |y|-|x| \end{array}\right\} \le |x-y|$.

PROBLEMA 2:

a) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(1+\tfrac{1}{n}, 2+\tfrac{1}{n}\right) =$



$= \emptyset$. DEM si $n=1$ $(2,3) \not\ni 2$.

Si $r \le 2$ $\quad (2,3) \not\ni r$.

Si $r > 2$ $\quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ con $2 + \frac{1}{n_0} < r$

luego $r \notin \left(1+\frac{1}{n_0}, 2+\frac{1}{n_0}\right)$.

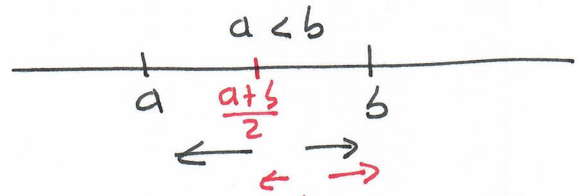
b) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(1-\tfrac{1}{n}, 2+\tfrac{1}{n}\right) =$

$= (0,3)$. DEM $n=1$ $\quad (0,3) \subseteq \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(1-\tfrac{1}{n}, 2+\tfrac{1}{n}\right)$

$\left(1-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right) \subseteq (0,3) \quad \forall n \ge 1$,

PROBLEMA 3:) $a,b\in\mathbb{R}$, $a\le b$.

b) CIERTA. Si $b-\varepsilon\le a \quad \forall \varepsilon>0$,



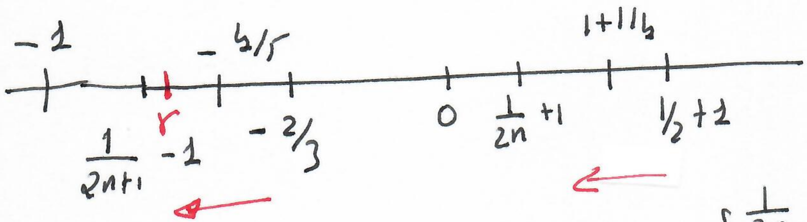
Si $b>a \Rightarrow b-\frac{b-a}{2}=\frac{b+a}{2}>a$ LLEGAMOS A CONTRADICCIÓN

c) FALSA. $a-\varepsilon < a\le b \quad \forall\varepsilon>0$

LUEGO SI $a<b$, $a-\varepsilon<a<b \not\Rightarrow a=b$.

PROBLEMA 4:)

a) $A=\{\frac{1}{n}+(-1)^n : n\in\mathbb{N}\}=\{0,\frac{1}{2}+1,\frac{1}{3}-1,1+\frac{1}{4},-\frac{4}{5}\}$

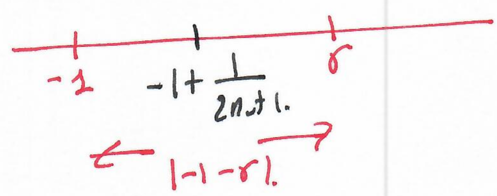


$\max A=\frac{1}{2}+1\ge \begin{cases}\frac{1}{2n}+1 & \forall n\in\mathbb{N}\\ y & \\ \frac{1}{2n+1}-1 & \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$ (y $\frac{1}{2}+1\in A$)

Por otro lado $\inf A=-1$

$-1\le\begin{cases}\frac{1}{2n+1}-1 & \forall n\\ \frac{1}{2n}+1 & \forall n.\end{cases}$ Luego -1 es cota inferior.

Si $r>-1$ existe n_0 con $-1+\frac{1}{2n_0+1}<r$



($\frac{1}{2n_0+1}<|-1-r|$)

Luego $r>-1$, no es cota inferior.

Como $\inf A$ es la mayor de las cotas inferiores

$-1=\inf A$.

PROBLEMA 4:

d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2+x+1 \geq 0\}$.

$x^2+x+1=0 \iff x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} \notin \mathbb{R}$, luego x^2+x+1 no tiene raíces. Veremos que como $f(x)=x^2+x+1$ es una función continua sin raíces $f(x)\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Así $\{x\in\mathbb{R} : x^2+x+1\geq 0\} \overset{(*)}{=} \mathbb{R}$.

Dem (*) Si $x\in[-1,1]$ $x+1\geq 0$ y así $x^2+x+1>0$

Si $|x|>1$ $x^2>|x| \Rightarrow x^2+x\geq 0$, luego $x^2+x+1>0$.

No existe ni inf ni el sup del conjunto.

PROBLEMA 5: Si $\alpha=\sup A \Rightarrow \alpha\leq\beta$ $\forall\beta$ cota superior. Luego $\alpha-\varepsilon<\alpha$, $\alpha-\varepsilon$ no puede ser cota superior, luego existe $a\in A$ con $\alpha-\varepsilon<a$.

Si α es cota superior y $\forall\varepsilon>0$ $\exists a\in A$ con $\alpha-\varepsilon<a$ se sigue que si $r<\alpha$ y $\varepsilon=\alpha-r$ se tiene que existe $a\in A$ con $\alpha-(\alpha-r)=r<a$. Luego r no es cota superior. Por tanto α cota superior, es la menor de todas ellas.

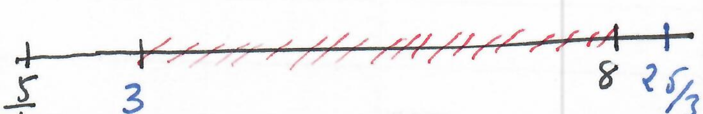
Sea A conjunto no vacío acotado inferiormente. $\beta=\inf A \iff \beta$ es cota inferior y $\forall\varepsilon>0$ $\exists a\in A$ tal que $a<\beta+\varepsilon$.

Dem como la del supremo.

PROBLEMA 6: a) $A=\{3, 3'3, \ldots, 3'3333, \ldots\}$.

$\min A = \inf A = 3$ $\sup A = \frac{10}{3} = 3'333\ldots 33\ldots = 3,\overline{3}$.

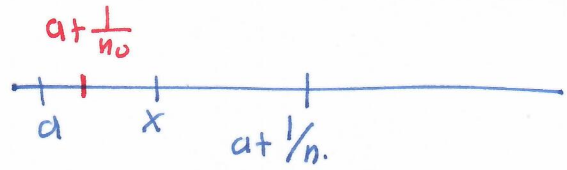
b) $[3,\frac{25}{3}]\cap(\frac{5}{4},8] =$



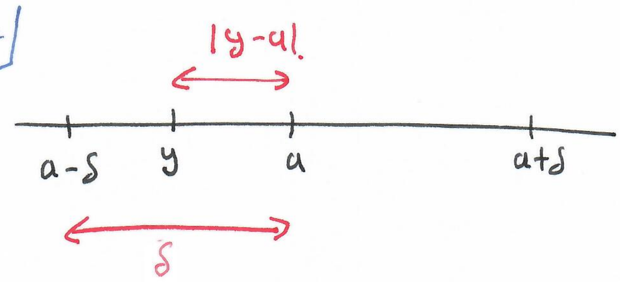
$=[3,8]$ luego min es 3 y máx 8.

$\boxed{\frac{25}{3}>8 \iff 25>24}$

PROBLEMA 7:



PROBLEMA 8:



PROBLEMA 9: a) $a = \inf a_n$ y $b = \sup b_n$

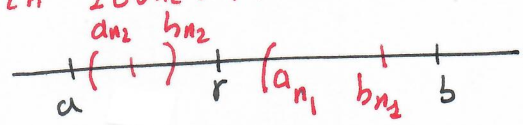
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) \subseteq (a,b).$$

DEM $\quad x\in(a_n,b_n) \Rightarrow a\le a_n < x < b_n < b \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in(a,b).$

OBSERVEMOS QUE SI LA IGUALDAD PUEDE NO DARSE.

SEA $r\in(a,b)$



SI n ES PAR SEA $(a_n,b_n) = \left(a+\frac{|r-a|}{n}, r\right).$

SI n ES IMPAR SEA $(a_n,b_n) = \left(r, \frac{|r-b|}{n} - b\right)$

EN ESTE CASO $r\notin \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n,b_n).$

PROBLEMA 10:

g) SI $ax^2+bx+c=0$ y $a\neq 0$, entonces

$$ax^2+bx+c = (\sqrt{a}x)^2 + \frac{2b}{2\sqrt{a}}\sqrt{a}\,x + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c =$$

$$= \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$ SI IGUALAMOS A CERO

$$\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c$$ ASÍ $\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}} = \mp\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a}}$

LUEGO $x = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(-\frac{b}{2\sqrt{a}} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}\right) = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$

EN $\mathbb{R}$, SIEMPRE QUE $b^2-4ac \geq 0.$

PROBLEMA 11: $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ V

SEA $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $a^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = a+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^3 = a^2 + 1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \underline{a^{n+1} = a^n + a^{n-1}}$ (*)

$b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ $b^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = b+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^3 = b^2 + b \Rightarrow \ldots \Rightarrow \underline{b^{n+1} = b^n + b^{n-1}}$ (*)

AHORA PARA $n=1$ $\boxed{a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] = 1}$

$$\boxed{a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[1 \sqrt{5}\right] = 1}$$

AHORA $\boxed{a_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[a^{n+1} - b^{n+1}\right] \underset{\text{USANDO *}}{=}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[a^n + a^{n-1} - (b^n + b^{n-1})\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[a^n - b^n\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[a^{n-1} - b^{n-1}\right] = \boxed{a_n + a_{n+1}.}$$

ASI $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \in \mathbb{N}$

YA QUE $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ $a_3 = a_2 + a_1 \in \mathbb{N}$. etc

LA SUCESIÓN $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ $n \geq 1$ CON $a_0 = a_1 = 1$

ES LA SUCESIÓN DE FIBONACCI (S. XIII)

PROBLEMA 12: ¿ $\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1.$$

$$x^2 \leq x^2+y^2 \qquad \sqrt{x^2+y^2} > 0$$

PROBLEMA 13: $(1+x)^n \geq 1+nx$. BINOMIO DE NEWTON.

PROBLEMA 14: a) $A = \left\{ \dfrac{x^2+2x+1}{x-1} : 0 < x < 1/2 \right\}$

$$\frac{x^2+2x+1}{x-1} = \frac{(x+1)^2}{x-1} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{ll} 1 < (x+1)^2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2 & \text{si } x \in (0, 1/2) \\ -1 < x-1 < -1/2 & 1/2 < |x-1| < 1 \end{array}$$

Luego $\quad \dfrac{-\left(\frac{3}{2}\right)^2}{1/2} \leq \dfrac{(x+1)^2}{x-1} \leq -\dfrac{1}{1}$

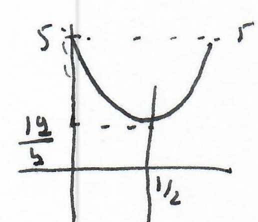
$\operatorname{Inf} A = -\frac{9}{2}$ se alcanza para $x = \frac{1}{2}$

$\operatorname{Sup} A = -1$ se alcanza para $x = 0$

Ambos valores no están en el conjunto.

c) $C = \left\{ \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-x+5} : 0 < x < 1 \right\}$

Este tipo de problema será más sencillo cuando sepamos de representar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-x+5}$



$$x^2 - x + 5 = x^2 - 2\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{20}{4} = (x - 1/2)^2 + \tfrac{19}{4}$$

$$\frac{19}{4} \leq x^2 - x + 5 < 5 \qquad \text{si } x \in (0,1).$$

y $\quad 0 < \sqrt{x} < 1 \qquad$ si $x \in (0,1)$

Como $0 \leq \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-x+5} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ y para $x = 0$ $f(0) = 0$

se sigue que $\operatorname{Inf} C = 0$ (¡Aunque hay que usar la continuidad de f!)

Cota superior $\quad \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-x+5} \leq \dfrac{1}{\frac{19}{4}} = \dfrac{4}{19} \quad \forall x \in (0,1).$

PROBLEMA 15:) SI $0 < a < b$ ENTONCES

$$a \underset{(\bullet)}{<} \frac{2ab}{a+b} \underset{(\bullet\bullet)}{<} \sqrt{ab} \underset{(\bullet\bullet\bullet)}{<} \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b$$

$(\bullet)$ $a < \frac{2ab}{a+b} \iff a^2+ab < 2ab \iff a^2 < ab \iff a < b$

$(\bullet\bullet)$ $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} \iff \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} < ab \iff 4ab < (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

$\iff \boxed{0 < a^2+b^2-2ab = (a-b)^2}$

$(\bullet\bullet\bullet)$ $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \iff ab < \frac{(a+b)^2}{4} \iff 4ab < (a+b)^2$

$\iff 4ab < a^2+b^2+2ab \iff 0 < (a-b)^2.$

PROBLEMA 16:)

c) $x^2 > 3x+1 \iff x^2-3x-1 > 0$

$\iff x^2 - 2\frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 1 \iff$

$\iff (x-3/2)^2 - \frac{13}{4} > 0 \iff (x-3/2)^2 > \frac{13}{4}$

$\iff |x-3/2| > \sqrt{\frac{13}{4}}$

LUEGO $x > \sqrt{\frac{13}{4}} + 3/2$

Y $3/2 - x > \sqrt{\frac{13}{4}} \iff x < \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}.$

b) $\frac{x-1}{x+1} > 0$ $\begin{cases} x > 1 & \Rightarrow x-1,\ x+1 > 0 \\ x \in (-1,1) & \Rightarrow x-1 < 0 \text{ y } x+1 > 0 \text{ !! NO ES POSIBLE} \\ x < -1 & \Rightarrow x-1,\ x+1 < 0. \end{cases}$

LA SOLUCIÓN ES $|x| > 1.$

PROBLEMA 18:

a) $\{x \in \mathbb{R} : |2x+3| < 6\} = \{x \in \mathbb{R} : -9/2 < x < 3/2\}$

SI $|2x+3| < 6$

SI $2x+3 \geq 0 \Rightarrow 2x+3 < 6 \iff x < \frac{3}{2}$ $\Big|$ $\Rightarrow x \in [-3/2, 3/2)$

$x \geq -3/2$

SI $2x+3 < 0 \Rightarrow -2x-3 < 6 \iff x > \frac{-9}{2}$ $\Big|$ $\Rightarrow x \in (-9/2, -3/2)$

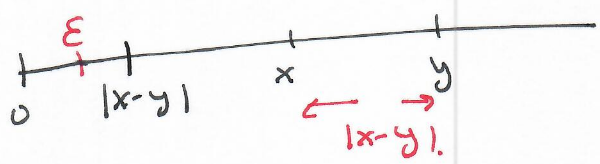
$x < -3/2$

COMO $-9/2 < -3/2$, SE SIGUE QUE $x \in (-9/2, 3/2)$.

PROBLEMA 18: SI $x \neq y$ SUPONGAMOS $x < y$

ENTONCES $0 < y - x = |y-x|$, LUEGO SI:

$0 < \varepsilon < |y-x|$



NO SE VERIFICA LA HIPÓTESIS.

PROBLEMA 19:

$$|(w+y)-(x+z)| = |(w-x)+(y-z)| \underset{\text{DESIGUALDAD TRIANGULAR}}{\leq} |w-x|+|y-z| \underset{\text{HIPÓTESIS}}{<} \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$|(w-y)-(x-z)| = |(w-x)+(z-y)| \leq |w-x|+|z-y| \leq \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$$