

NÚMEROS REALES.

1.- Razona la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones, demostrándolas si son ciertas y dando un contraejemplo en caso de no serlo:

- a) En \mathbb{R} , todo subconjunto no vacío y acotado inferiormente tiene un mínimo;
- b) todo número real tiene al menos una raíz cuadrada;
- c) si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

2.- Calcula:

- a) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n, 2 + 1/n)$
- b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (1 - 1/n, 2 + 1/n)$
- c) $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-n, n)$
- d) $\bigcap_{n=2}^{\infty} (1 + 1/n, 2 - 1/n)$
- e) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)$
- f) $\bigcap_{n=2}^{\infty} (1 + 1/n, 2 - 1/n)$.

3.- ¿Cual de las siguientes afirmaciones es cierta?

- a) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$, y para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $a \leq b - \epsilon$, entonces $a = b$.
- b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$, y para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $b - \epsilon \leq a$, entonces $a = b$.
- c) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$, y para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $a - \epsilon \leq b$, entonces $a = b$.
- d) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leq b$, y para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $a \leq b + \epsilon$, entonces $a = b$.

4.- Halla el supremo y el ínfimo, si existen, de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} :

- a) $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$
- b) $\{1/n : n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$
- c) $\{1/n + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$
- d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \geq 0\}$
- e) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 1 < 0\}$
- f) $\{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 + x - 1 < 0\}$.

5.- Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente. Prueba que $\alpha = \sup A$ si y solo si α es cota superior de A y para todo $\epsilon > 0$ existe $a \in A$ verificando que $\alpha - \epsilon < a$.

Enuncia y demuestra una propiedad análoga para el extremo inferior de un conjunto acotado inferiormente.

6.- Calcula cotas superiores e inferiores, supremos e ínfimos (si existen) de los siguientes conjuntos:

- a) $\{3, 3'3, 3'33, 3'333, \dots\}$
- b) $[3, \frac{25}{3}] \cap (\frac{5}{4}, 8]$
- c) $\{x \in \mathbb{R} : x = 1 - \frac{1}{r}, \text{ con } r > 0\}$.

d) $A \subset \mathbb{R}$ de modo que si $x \in A$ y su forma decimal es $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ se tiene que $a_{2k} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

7.- Demuestra que si tres números reales satisfacen que

$$a \leq x \leq a + 1/n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

entonces $x = a$.

8.- Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$. Prueba que

$$\{y \in \mathbb{R} : |y - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta).$$

9.- Se considera la familia de intervalos de \mathbb{R} $\{(a_n, b_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

- a) Si $a = \inf a_n$ y $b = \sup b_n$, demuestra que $\cup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n) \subseteq (a, b)$.
- b) Demuestra que si $(a_n, b_n) \subseteq (a_{n+1}, b_{n+1})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\cup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n) = (a, b)$.
- c) Da un ejemplo de que si $a' = \sup a_n$ y $b' = \inf b_n$, entonces en general **no** es cierto que $\cap_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n) \subset (a', b')$; incluso si $(a_{n+1}, b_{n+1}) \subseteq (a_n, b_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

10.- Demuestra lo siguiente:

- a) Si $ax = a$ para algún número $a \neq 0$, entonces $x = 1$;
- b) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ c) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$;
- d) si $x^2 = y^2$, entonces o bien $x = y$ o bien $x = -y$;
- e) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$;
- f) $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$;
- g) si $ax^2 + bx + c = 0$ y $a \neq 0$, entonces $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. ¿Siempre?

11.- Comprueba que $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ es un número natural para todo $n \in \mathbb{N}$.

12.- Prueba que $\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 1$ y que $\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq 1$.

13.- (Desigualdad de Bernoulli). Prueba por inducción que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

14.- Encuentra una cota superior e inferior (si existen) de los siguientes conjuntos:

- a) $A = \left\{ \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1} : 0 < x < 1/2 \right\}$ b) $B = \left\{ \frac{x^2 + 1}{x - 1} : 2 < x < 2, \right\}$
- c) $C = \left\{ \frac{\sqrt{x}}{x^2 - x + 5} : 0 < x < 1 \right\}$.

15.- Demuestra que si $0 < a < b$, entonces

$$a < \frac{2ab}{a + b} < \sqrt{ab} < \frac{a + b}{2} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} < b.$$

16.- Encuentra los números reales x para los que:

- a) $4 - x < 3 - 2x$ b) $5 - x^2 < 8$ c) $x^2 > 3x + 1$
- d) $2x + 3 < 6$ e) $1 < x^2 < 4$ f) $x^2 + x > 2$
- g) $(x - \sqrt[3]{2})(x - \sqrt{2}) > 0$ h) $\frac{x-1}{x+1} > 0$ i) $|x - 3| = 8$
- j) $|x - 3| < 8$ k) $|x + 4| < 2$ l) $|x - 1| + |x - 2| > 1$
- m) $|x - 1| + |x + 1| < 1$ n) $|x - 1||x - 2| = 3$.

17.- Prueba que:

a) $\{x \in \mathbb{R} : |2x + 3| < 6\} = \{x \in \mathbb{R} : -9/2 < x < 3/2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < |x|\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 1/2\}$.

18.- Sean $x, y \in \mathbb{R}$ de modo que para todo $\epsilon > 0$ se verifica que $|x - y| < \epsilon$. Prueba que $x = y$.

19.- Sean $w, x, y, z \in \mathbb{R}$ de modo que $|w - x| < \epsilon/2$ y $|y - z| < \epsilon/2$ para algún $\epsilon > 0$. Prueba que:

$$|(w + y) - (x + z)| < \epsilon \quad \text{y que} \quad |(w - y) - (x - z)| < \epsilon.$$