

NÚMEROS COMPLEJOS.

1.- Calcula:

- a) $Re(1 + i)$ b) $Im(3 - 2i)$ c) $\overline{3 - 2i}$ d) $(1 + i)(3 - 2i)$
e) $1/i$ f) $\frac{1-i}{1+i}$ g) $\frac{2}{1-3i}$ h) $(1 + \sqrt{3}i)^3$.

2.- En cada caso, determina x y y reales que verifican:

- a) $x + yi = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ b) $x + yi = |x - yi|$ c) $\sum_{k=0}^{100} i^k = |x - yi|$.

3.- Halla el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:

- a) $3 + 4i$ b) $(3 + 4i)^{-1}$ c) $(1 + i)^5$ d) $|3 + 4i|$ e) $\frac{1 + i}{1 - i}$.

4.- Determina los números complejos z que verifican:

- a) $z^2 = 3 - 4i$ b) $z^2 + zi + 2 = 0$ c) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$.

5.- Los tres números complejos $3 + 4i$, 1 y i son vértices de un triángulo en

\mathbb{C} . Al girar dicho triángulo $\pi/6$ alrededor del origen, ¿cuales serán los vértices del triángulo que obtenemos?

6.- Calcular:

- a) $\sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[3]{-2 + 2i}$ c) $\sqrt[4]{-4 + 3i}$ d) $(1 - i)^{-1/2}$
e) $(-1 + i)^{8/3}$ f) $(1 - i)^{-3/2}$ g) $(-\sqrt{3} - i)^{-2/3}$.

7.- Describe los conjuntos de números complejos que verifican las siguientes condiciones:

- a) $|z| < 1 - Rez$ b) $Im \frac{z - a}{z - b} = 0$, para todo $a, b \in \mathbb{C}$ fijos.
c) $|z - a| + |z - b| = r$, donde $a, b \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ son fijos.
d) $Re \frac{z - a}{z - b} = 0$, para $a, b \in \mathbb{C}$ fijos. e) $|\frac{z - 3}{z + 3}| = 2$.

8.- a) Demuestra que las raíces n -ésimas de un número complejo no nulo se obtienen multiplicando una de ellas por las raíces n -ésimas de 1.

b) Prueba que el producto de dos raíces n -ésimas de la unidad es de nuevo una raíz n -ésima de la unidad.

c) Prueba que la inversa multiplicativa de una raíz n -ésima de la unidad es de nuevo una raíz n -ésima de la unidad.

9.- Resuelve los problema **6,7,8** de la Hoja *Propiedades de los Números Reales* y el **10** de la Hoja *Números Reales* para $x, y, z \in \mathbb{C}$. ¿Qué solución tiene la ecuación del problema **10 g** siendo x, a, b, c números complejos?

10.- Resuelve las ecuaciones: a) $z^2 - (5 - 14i)z - 2(12 - 5i) = 0$ b) $z^n = \bar{z}$.

11.- Sea $z \neq 1$ con $|z| = 1$. Determina si son ciertas las siguientes afirmaciones;

- a) $\frac{1 + z}{(1 - 1/z)}$ es imaginario puro. b) El número $z + z^{-1}$ es real.

12.- Si $z \in \mathbb{C}$ y $Re(1/z) > 0$, entonces

- a) $z = \bar{z}$ b) $Re(z)Im(z) > 0$ c) $Rez > 0$ d) $\langle z, 1/z \rangle > 0$.

13.- ¿Cual de los siguientes números es una raíz quinta de $7i$?

- a) $\sqrt[5]{7}(\cos(2\pi/3) + \text{sen}(2\pi/3)i)$ b) $\sqrt[5]{7}(\cos(3\pi/2) + \text{sen}(3\pi/2)i)$
c) $\sqrt[5]{7}(1/\sqrt{2} + (1/\sqrt{2})i)$ d) $\sqrt[5]{7}i$.

14.- Describe la situación de los números complejos que cumplen que:

- a) $|z - 1| = 2$ b) $|z - 1| = |z + 1|$ c) $\bar{z} = -z$ d) $\bar{z} = z^{-1}$.

15.- Sean z y w dos números complejos. Prueba que:

- a) $||z| - |w|| \leq |z - w|$ y $||z| - |w|| \leq |z + w|$
b) $|z - w|^2 + |z + w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ (Regla de paralelogramo).

16.- Sean z, v y w tres números complejos tales $|z| \leq |w|$. Decide si son ciertas o no las siguientes desigualdades; justifica la respuesta:

- a) $|zv| \leq |wv|$ b) $|z + v| \leq |w + v|$.

17.- a) Halla todas las raíces cuartas de i .

b) Determina el conjunto de números complejos tales que su cuadrado coincide con alguna de sus raíces cuadradas.

c) Demuestra que las raíces n -ésimas de un número complejo no nulo se obtienen multiplicando una de ellas por las raíces n -ésimas de 1.

18.- Calcula:

- a) $\sqrt[5]{-1}$ b) $\sqrt[3]{-2 + 2i}$ c) $\sqrt[5]{-4 + 3i}$.

19.- Sean 1, z_1 y z_2 las tres raíces cúbicas de 1, con $Argz_1 < Argz_2$. Calcula el número complejo α tal que $\alpha z_2 = 1$.

20.- Expresar $\cos 3t$ y $\text{sen } 3t$ como polinomios de $\text{sen } t$ y $\cos t$.

21.- Se consideran $z, w, t \in \mathbb{C}$ de modo que $|z| = |w| = |t| = 1$. Comprueba que si $z + w + t = 0$, entonces los tres puntos están situados sobre los vértices de un triángulo equilátero.

22.- a) Prueba que para cualquier número natural n , el polinomio $z - 1$ divide al polinomio $z^n - 1$.

b) Demuestra que las raíces n -ésimas de 1 distintas de 1 son soluciones de la ecuación polinómica $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$.

c) Prueba que si m y n son números naturales y m divide a n , entonces el polinomio $z^m - 1$ divide al polinomio $z^n - 1$.

23.- Si $n = 2, 3, 4, \dots$; prueba que:

a) $\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$

b) $\text{sen} \frac{2\pi}{n} + \text{sen} \frac{4\pi}{n} + \dots + \text{sen} \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$.

24.- El punto del plano con coordenadas polares $r = 2$ y $\theta = 7\pi/6$

- a) está en el segundo cuadrante;
- b) está alineado con el origen y el punto $r = 7$ y $\theta = \pi/6$;
- c) está sobre la circunferencia de centro $(0;0)$ y radio $\sqrt{2}$;
- d) dista $7/6$ del $(0,0)$.

25.- ¿Cuál de los siguientes puntos del plano está más alejado del punto i ?

- a) $-i/3$
- b) $\sqrt{3}$
- c) $\sqrt{3} + 3i/2$
- d) $-1/2 + i/2y$.

26.- De un polinomio $P(x)$ se sabe que sus coeficientes son números enteros y que $-6, i$ y $1 - 2i$ son raíces del polinomio. De este polinomio se puede decir que:

- a) P es de grado 3
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \infty$
- c) P es de grado 5
- d) el término independiente es divisible por 2.

27.- a) Si z es raíz del polinomio con coeficientes reales $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$, prueba que \bar{z} también lo es.

b) Usar el ejercicio **4 b)** para ver que el apartado anterior no es cierto en general si los coeficientes son complejos.

28.- Encontrar las soluciones de la ecuación:

$$z^3 = -46 + 9i$$

si se sabe que $z = 2 + 3i$ es solución de la misma.

29.- Se pide descomponer el polinomio $x^4 + 1$ en

- a) producto de polinomios con coeficientes en \mathbb{Q} ;
- b) producto de polinomios con coeficientes en \mathbb{R} ;
- c) producto de polinomios con coeficientes en \mathbb{C} .

Haz lo mismo para los polinomios: $x^3 + x^2 - x + 2$ y $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.