SUCESIONES NUMÉRICAS

PROBLEMA 1: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ YA QUE

$$0 \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2-1}{n^2}}{\frac{2n^2+3}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{2} = 1/2$$

PROBLEMA 2: d), f) g) y h) USAN LA TEORÍA

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = 0$ YA QUE

$$0 < \frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

i) $x > 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty$ CLARO,

$x = 1+\delta$, LUEGO $(1+\delta)^n \geq 1+n\delta \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

BINOMIO DE NEWTON

j) $|x| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ CLARO

$\frac{1}{|x|} > 1$ y ASÍ $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{x}\right|^n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |x|^n = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0.$

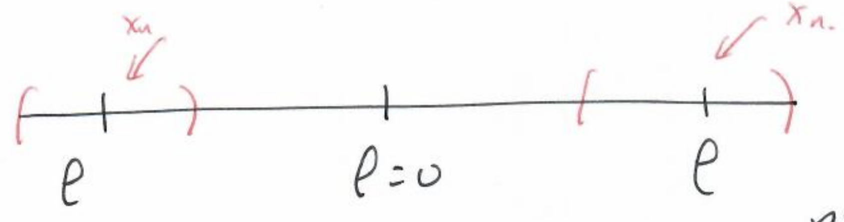
k) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+3^n}{3^{n+1}}} =$$

$$= \lim \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{3}+1/3} \underset{j)}{=} \frac{1}{1/3} = 3.$$

l) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2-n+1}{n^2}}{\sqrt{\frac{n^2+1}{n^4}}+\sqrt{\frac{n}{n^4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 1}{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\underset{\to 0}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}}}} = \infty$$

PROBLEMA 3: $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$



Si $\ell > 0$ ó $\ell < 0$, los términos de la sucesión no pueden ser alternativamente positivos o negativos (por definición de límite).
Luego $\ell = 0$. Ejemplo $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow 0$.

PROBLEMA 4:

$$\left|\frac{3n-1}{4n} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{3n-1-3n}{4n}\right| = \frac{1}{4n} < \frac{1}{n}.$$

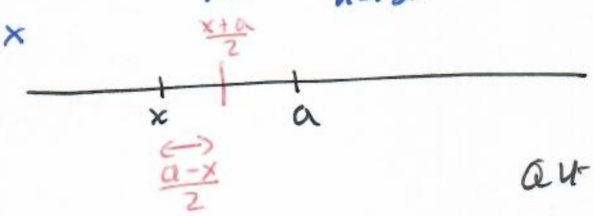
Sea $\varepsilon > 0$, si $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, entonces $\forall n \geq n_0$

$$\left|\frac{3n-1}{4n} - \frac{3}{4}\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Para $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ tomar $n_0 = 1000$.

PROBLEMA 5: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

a) $a > x$



Sea $0 < \varepsilon < \frac{a-x}{2}$ $\exists\, n_0$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{a-x}{2} \Rightarrow x_n \in \left(x - \frac{a-x}{2}, x + \frac{a-x}{2}\right)$

Luego $\boxed{x_n < x + \frac{a-x}{2} = \frac{a+x}{2} < \frac{a+a}{2} = a.}$

PROBLEMA 6:

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}}$ $\to 1$ si n es par; $\to -1$ si n es impar.

No existe el límite.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\overset{\to\infty}{n}}{\underset{\to 1}{1+\frac{1}{n}}} = \infty$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}} + \frac{n}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$

PROBLEMA 7: SE USAR QUE SI $a, b \in \mathbb{R}$ III

CON $a < b$, ENTONCES $\exists\, r, s$, $r \in \mathbb{Q}$ y $s \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

CON $a < r < b$ y $a < s < b$.

a) ASÍ SEA $x \in \mathbb{R}$ SEA $\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ y $\exists\, r_n \in \mathbb{Q}$.

CON $x - 1/n < r_n < x + \frac{1}{n}$. TOMANDO LÍMITES

$$\underset{n\to\infty}{\downarrow}\ x \qquad \underset{n\to\infty}{\downarrow}\ x \qquad \lim_{n\to\infty} r_n = x$$

PROBLEMA 8: $\lim_{k\to\infty} r_0 a_1 \ldots a_k = r_0 a_1 a_2 \ldots a_k \ldots$

CLARO $|r_0 a_1 \ldots a_k \ldots - r_0 a_1 \ldots a_k| =$

$= |\underbrace{0, 0 \ldots 0}_{k\text{-ceros}}\, a_{k+1} a_{k+2} \ldots| \leq \frac{1}{10^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

SEA $r = 0{,}55\ldots = 0'\overline{5}$ ASÍ

$10r = 5{,}55\ldots = 5'\overline{5}$

$10r - r = 9r = 5$ LUEGO $r = \frac{5}{9}$

PROBLEMA 9:

a) $x_1\ x_2 \quad x_{k+1} \ldots \quad x_{n+k} \longrightarrow x$

$\qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$\qquad\qquad y_1 \qquad\quad y_n \longrightarrow x$

DADO $\varepsilon > 0$ $\exists\, n_0$: $n \geq n_0$ $|x - x_n| < \varepsilon$

$\exists\, n_0$: $m > n_0$. $|x - y_m| = |x - x_{m+k}| < \varepsilon$.

$m + k > n_0$

LUEGO $y_n \longrightarrow x$.

PROBLEMA 10:) $x_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

y $|x_{2n} - x_{2n-1}| < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ENTONCES

SEA $\varepsilon > 0$, PARA $\varepsilon/2 > 0$ $\exists n_0$: $2n > 2n_0$

ENTONCES $|x - x_{2n}| < \varepsilon/2$.

PARA $\varepsilon/2 > 0$ $\exists n_1$ TAL QUE $\frac{1}{n_1} < \varepsilon/2$

SEA $n \geq \max\{2n_0, 2n_1\}$, ENTONCES

$$|x - x_n| = \begin{cases} |x - x_{2k}| < \varepsilon/2 & n = 2k \\ |x - x_{2k-1}| \leq |x - x_{2k} + x_{2k} - x_{2k-1}| \leq & \\ \leq |x - x_{2k}| + |x_{2k} - x_{2k-1}| \leq & n = 2k-1. \\ \leq \varepsilon/2 + \frac{1}{n_1} \leq \varepsilon & \end{cases}$$

LUEGO LA SUCESIÓN, TODA ELLA, CONVERGE A x.

EN PARTICULAR LA SUBSUCESIÓN $x_{3n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

PROBLEMA 11:)

a) $x_n = n + \frac{1}{n}$ $\quad y_n = -n + \frac{1}{n}$ AMBAS DIVERGEN

y $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$

b) $x_n = (-1)^n$. ESTÁ SABE NO CONVERGE

PERO $\lim_{n\to\infty} (x_n)^2 = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot x_n = 1$

PROBLEMA 12:)

a) $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$

NOTEMOS QUE $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

b) $x_n = n$ ES DIVERGENTE y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

EJERCICIO 2 g)

PROBLEMA 13:

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n-1} + \frac{1}{n+n}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)+1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)+(n-2)} + \frac{1}{(n+1)+(n-1)} + \frac{1}{(n+1)+n} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)}$$

AHORA ¿ $\frac{1}{n} > \frac{1}{(n+1)+n} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} =$

$$= \frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)} \quad ?$$

SI YA QUE $(2n+1)(2n+2) > n(4n+3)$

$$4n^2+6n+2 > 4n^2+3n$$

(x_n) ES DECRECIENTE.

$x_1 = \frac{1}{1} < 2$

$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} < 2$

SUPUESTO QUE $x_n < 2$

$$x_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} =$$

$$= \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} <$$

$$< 2 + \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}\right) < 2.$$

HIPÓTESIS INDUCCIÓN

$\wedge$ 0

PROBLEMA 14: SEA $(x_k = (-1)^k)_{k=1}^{\infty}$ NO CONVERGENTE

$$S_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2} = 0, \text{ LUEGO } \lim_{k\to\infty} S_k = 0.$$

PROBLEMA 15: TEORÍA

PROBLEMA 16: $x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{1}{3} + 4 > x_1$

SUPUESTO $x_n > x_{n-1} \Rightarrow x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + 4 > \frac{x_{n-1}}{3} + 4 = x_n.$

LUEGO LA SUCESIÓN ES CRECIENTE.

$x_1, x_2 < 6$, SUPUESTO $x_n < 6 \Rightarrow x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + 4 < \frac{6}{3} + 4 < 6$

(x_n) CRECIENTE Y ACOTADA $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = l$. ASÍ:

$x_{n+1} = \frac{x_n}{3} + 4$ TOMANDO LÍMITES $l = l/3 + 4 \Rightarrow \underline{\underline{l = 6}}$

PROBLEMA 17:) $x_1 = 3/2 \Rightarrow x_1 \in (1,2)$

$$x_2 = 2 - \frac{1}{3/2} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \in (1,2)$$

Supuesto $1 < x_n < 2 \iff \frac{1}{2} < \frac{1}{x_n} < 1$

$\iff -1 < -\frac{1}{x_n} < -\frac{1}{2} \iff 2-1 < 2-\frac{1}{x_n} = x_{n+1} < 2 - \frac{1}{2}$

Luego $x_n \in (1,2)$.

Por otro lado $x_1 > x_2$ Supuesto $x_{n-1} > x_n$ (positivos)

$\iff \frac{1}{x_n} > \frac{1}{x_{n-1}} \iff -\frac{1}{x_n} < -\frac{1}{x_{n-1}}$

$\iff 2 - \frac{1}{x_n} = x_{n+1} < 2 - \frac{1}{x_{n-1}} = x_n$ / Lo que

prueba que la sucesión es decreciente.

Luego (x_n) tiene límite (por ser monótona y acotada). $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell \geq 1$ (ya que $x_n \geq 1$)

Como $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ tomando límites

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & 2 - \frac{1}{x_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & & 2 - \frac{1}{\ell} \end{array} \quad (\ell \neq 0)$$

Así $\ell = 2 - \frac{1}{\ell} \iff \ell^2 - 2\ell + 1 = (\ell-1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\ell = 1}$

PROBLEMA 18:) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \iff$

$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n$

Luego (a_n) es creciente y está acotada por b_1

" (b_n) es decreciente y está acotada por a_1

$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = b$ y $a \leq b$

$a = \sup\{a_n\}$, $b = \inf\{b_n\}$, $a_n \leq b_n \ \forall n$

Así $a_n \leq a \leq b \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Luego

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$