SUCESIONES II

PROBLEMA 1:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(3+6+\dots+3n) = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}(1+2+\dots+n) =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}\frac{(1+n)n}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+3n}{2n^2} = 3/2.$

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(1+n)n}{2}$

b)

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ SUMANDO MÁS PEQUEÑO

$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ SUMANDO MÁS GRANDE

$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, $\quad \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, $\quad \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^2-1} + \dots + \frac{1}{n^2-1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$ (SERIE TELESCÓPICA)

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1)(k-1)} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \dots\right)$

$= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

e) $a > 1 \quad \sqrt[n]{a} + \dots + \sqrt[n]{a^n} = a^{1/n} + a^{2/n} + \dots + a^{n/n} = (a^{1/n}) + (a^{1/n})^2 + \dots + (a^{1/n})^n$

Si $a^{1/n} = r \quad S_n = r + r^2 + \dots + r^n \Rightarrow S_n = \frac{r - r^{n+1}}{1-r}$

$r S_n = r^2 + \dots + r^n + r^{n+1}$

Luego $\frac{\sqrt[n]{a} + \dots + \sqrt[n]{a^n}}{n} = \frac{\sqrt[n]{a} - a^{\frac{n+1}{n}}}{n(1-\sqrt[n]{a})} = \frac{\sqrt[n]{a}(1-a)}{n(1-\sqrt[n]{a})} \xrightarrow{n\to\infty} ?$

(ESPERAR A LA REGLA DE L'HÔPITAL).

PROBLEMA 1:

f) $\dfrac{n}{(2n)^2} \leq \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2} \leq \dfrac{n}{(n+1)^2}$

$\dfrac{n}{(2n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\quad \dfrac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

g) $0 \leq \left| \dfrac{\cos n}{n} \right| \leq \dfrac{1}{n}$.

i) $\dfrac{(-1)^n + n}{n^2+1} = \dfrac{\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{0}{1} = 0.$

PROBLEMA 2: Sea $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$

SUCESIÓN CRECIENTE: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} =$ (binomio de Newton)

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\, n^k} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{n!}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Para $n < n+1$ y $1 \leq k < n$ se tiene

$\dfrac{k}{n+1} \leq \dfrac{k}{n}$ así $-\dfrac{k}{n} \leq \dfrac{-k}{n+1}$ y $1-\dfrac{k}{n} \leq 1-\dfrac{k}{n+1}$

Como
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \geq$$
$$\geq 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$
$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

ACOTADA: $2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \leq$ $\quad 1-\frac{k}{n} \leq 1$

$$\leq 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\leq 2 + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3.$$

$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ creciente, acotada $\exists \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ [notación.]

PROBLEMA 3:

a) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{n}{3}\right)}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{6} = e^{6}$

AL MENOS SI $n=3k$ ES CLARO.

e) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$

(n^2) ES UNA SUBSUCESIÓN DE $(n.)$

g) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2n}{n^2+n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+n}{n^2+n}\right)^{2n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n}{n^2+n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1+n} =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n-1} =$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-2} = e\cdot e\cdot 1 = e^{2}.$

PROBLEMA 4: $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ luego $\lim_{n\to\infty} x = x \neq 0$

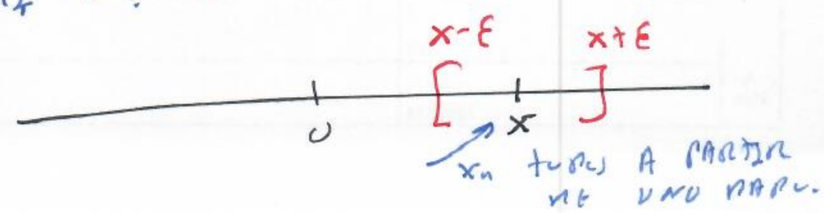
por otro lado si $\frac{x_n}{x} \to 1$

así $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x} = 1$;

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x}\cdot x = 1\cdot x = x.$

PROBLEMA 5: $(x_n)_{n\geq 1}^{\infty} \to x \neq 0$ ¿$\exists\, n_k \uparrow \infty$ tal que $x_{n_k} = 0$? LA RESPUESTA ES QUE NO

PRUEBA GRÁFICA



PROBLEMA 6:) $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ y $|b_n| < M$ $\forall n$.

DADO $\varepsilon > 0$, SEA $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ $\exists n_0 : n \geq n_0$ $|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

LUEGO $\forall n \geq n_0$ $|x_n b_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} M < \varepsilon$,

LUEGO $\lim_{n \to \infty} x_n b_n = 0$

EJEMPLO $x_n = \frac{1}{n} \to 0$

$b_n = \sqrt{n} \uparrow \infty$ y $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

$b_n = n \uparrow \infty$ y $\frac{n}{n} \to 1$

$b_n = n^2 \uparrow \infty$ y $\frac{n^2}{n} = n \to \infty$.

PROBLEMA 7:) CLARO

$|x_{n+m}| \leq k|x_{n+m-1}| \leq k^2 |x_{n+m-2}| \leq \dots \leq k^m |x_n| \leq \dots$

$\leq k^m \cdot k^{n-1} |x_1| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$ YA QUE $k^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ $(k \in (0,1))$.

PROBLEMA 8:) EJEMPLO $(-1)^n$ $\begin{cases} x_{2n} \to 1 \\ x_{2n+1} \to -1 \end{cases}$

SI $x_{2n} \to x$ y SI $x_{2n+1} \to x$ } PARA $\varepsilon > 0$ y DADO $\varepsilon/2$ $\begin{cases} \exists n_0 : 2n > 2n_0 \Rightarrow |x_{2n} - x| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists n_1 : 2n+1 > 2n_1+1 \Rightarrow |x_{2n+1} - x| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

LUEGO SI $n \geq \max\{2n_0, 2n_1+1\}$. $\Rightarrow$ $|x_n - x| < \varepsilon/2$.

PROBLEMA 9:) SI $x_{2n} \to x$ e $x_{2n+1} \to y$

SI $x_{3n} \to z$. $\begin{cases} x_{6n} \to z & \text{PERO TAMBIEN A } x \Rightarrow x = z \\ x_{3(n+1)} \to z & \text{PERO TAMBIEN A } y \Rightarrow y = z \end{cases}$

SUBSUCESIONES DE $(3n)$, PERO TAMBIEN DE $x_{(2n)}$ Y (x_{2n+1}).

Y LA SIGUIENTE

AHORA SE APLICA EL PROBLEMA ANTERIOR

PROBLEMA 10:

a) $a>0$ $x_1 = \sqrt{a}$ y $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}$ $n \geq 1$

CRECIENTE $x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a+\sqrt{a}} = x_2$ ya que $\sqrt{a}>0$.

Si suponemos que $x_{n-1} \leq x_n \iff$

$\iff a + x_{n-1} \leq a + x_n \iff +\sqrt{a+x_{n-1}} \leq \sqrt{a+x_n} \iff$

$\iff x_n \leq x_{n+1}$.

ACOTADA Supongamos que $\ell \geq x_n$

entonces $a + x_n \leq \ell + a$ y así

$x_{n+1} = \sqrt{a+x_n} \leq \sqrt{\ell + a} \leq \ell$

↓ forzamos $x_{n+1} \leq \ell$

Luego $\sqrt{a+\ell} \leq \ell \iff a + \ell \leq \ell^2 \iff \ell^2 - \ell - a \geq 0$.

Resolvemos $\ell^2 - \ell - a = 0 \iff \ell = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2} > 0$

Luego $\ell = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ acota a todo x_n

LÍMITE: como existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ (por ser creciente y acotada)

$\Rightarrow$ $x_{n+1} = \sqrt{a+x_n}$

$\downarrow \quad \downarrow$

$x = \sqrt{a+x} \iff x^2 - x - a = 0 \iff$ $\boxed{x = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.}$

c) $x_1 > 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n^2}$ $n \geq 1$

CRECIENTE: $x_2 = \sqrt{1+x_1^2} > x_1 > 1$

Si $x_n > x_{n-1} > 1 \Rightarrow x_n^2 > x_{n-1}^2 > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{1+x_n^2} = x_{n+1} > \sqrt{1+x_{n-1}^2} = x_n$.

AHORA SI $x_n \leq \ell$ $\forall n$ $\Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{1+x_n^2} \leq \sqrt{1+\ell^2} \; ¿\leq \ell?$

No parece cierto $1+\ell^2 \leq \ell^2$; luego parece que no va a estar acotada

Si lo estuviese, sería una sucesión convergente, $x_n \to x$

y así $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n^2}$

$\downarrow$

$x = \sqrt{1+x^2} > x$ ¡¡ Llegamos a contradicción !!

PROBLEMA 11:) A) $a_{n+1} = a_n \frac{n}{n+5}$ $a_1 = 5$.

$\frac{n}{n+5} \in (0, 1)$ LUEGO (a_n) ES DECRECIENTE y $0 \le a_n \le 5$ $\forall n$.

LUEGO LA SUCESIÓN ES CONVERGENTE.

B) e) $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + m}{2 x_n}$ $x_1 = m > 1$.

$$\Updownarrow$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{m}{x_n}\right)$$

SI FUESE CONVERGENTE (VER PROBLEMA SIGUIENTE)

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{m}{x}\right).$$

ASÍ $x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{m}{2} \iff \frac{1}{2}x^2 = \frac{m}{2} \iff x^2 = m \iff x = \sqrt{m}$

PROBLEMA 12:)

SI $n = 2$ $x_2 = \frac{1}{2}\left[x_1 + \frac{a}{x_1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x_1^2 + a}{x_1}\right]$

ACOTADA INFERIORMENTE:

$2x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{x_n} \Rightarrow x_n^2 - 2x_{n+1}x_n + a = 0$ POR

ECUACIÓN DE 2º GRADO QUE TIENE A $x_n > 0$ POR

SOLUCIÓN, ASÍ EL DISCRIMINANTE.

$4x_{n+1}^2 - 4a \geq 0 \Rightarrow x_{n+1}^2 \geq a.$

(ES DECIR $x_{n+1} \geq \sqrt{a}$ $\forall n$.).

DECRECIENTE: $x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) =$

$= \frac{1}{2}x_n - \frac{a}{2x_n} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \geq 0$

YA QUE $x_n^2 \geq a$.

LUEGO $x_n \geq x_{n+1}$.

LÍMITE; COMO (x_n) ES DECRECIENTE Y ACOTADA INFERIORMENTE $x_{n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{x_n^2 + a}{x_n}$

EXISTE $\lim x_n = x \neq 0$ ASÍ

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\,\frac{x^2 + a}{x}$ DESPEJANDO $x = \sqrt{a}$. c.q.d

PROBLEMA 13:- PARA $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^3 - 7x + 2$

OBSERVEMOS QUE $f(0) = 2 > 0$

$f(1) = 1 - 7 + 2 < 0$

SEA $a \in (0,1)$ Y DESPEJAMOS EN $x^3 - 7x + 2 = 0$

$$x = \frac{x^3 + 2}{7}$$

SEA $x_1 = a$ Y $x_n = \frac{x_{n-1}^3 + 2}{7}$ $n \geq 2$.

ACOTADA CLARAMENTE $\frac{x_{n-1}^3 + 2}{7} \geq 0$ (YA QUE $x_1, x_2 \dots x_n > 0$)

Y COMO $1 > x_n \Rightarrow 1 > \frac{1^3 + 2}{7} \geq \frac{x_n^3 + 2}{7} = x_{n+1}$

CONTRACTIVA $|x_n - x_{n+1}| = \left| \frac{1}{7}(x_{n-1}^3 + 2) - \frac{1}{7}(x_n^3 + 2) \right| =$

$= \frac{1}{7} |x_{n-1}^3 - x_n^3| = \frac{1}{7} |(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1}^2 + x_{n-1}x_n + x_n^2)|$ $x, y \in (0,1)$

HOJAS ANTERIORES
$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

$\leq \frac{3}{7} |x_{n-1} - x_n|$

COMO $(x_n) \subseteq (0,1)$ Y ES CONTRACTIVA (POR TANTO DE CAUCHY) ES CONVERGENTE. $x_n \to x$

AHORA $x_{n+1} = \frac{1}{7}(x_n^3 + 2)$

$\downarrow_{n\to\infty}$ $\quad\downarrow_{n\to\infty}$

$x = \frac{1}{7}(x^3 + 2) \iff x^3 - 7x + 2 = 0$.

PROBLEMA 14:- a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n^2}}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha^n}{n}\right)^n = \infty$

YA QUE $\frac{\alpha^n}{n} > 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

d) $\lim_{n\to\infty} n^2 a^n$, $a > 0$. SI $a \geq 1$ $\lim_{n\to\infty} n^2 a^n \geq \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$

SI $a < 1$ $n^2 a^n = \frac{n^2}{\left(\frac{1}{a}\right)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad \frac{1}{a} > 1$

(VER EJERCICIO SIGUIENTE)

PROBLEMA 14:]

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n^2}$ PARA $b>0$

SI $0<b\le 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n^2} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

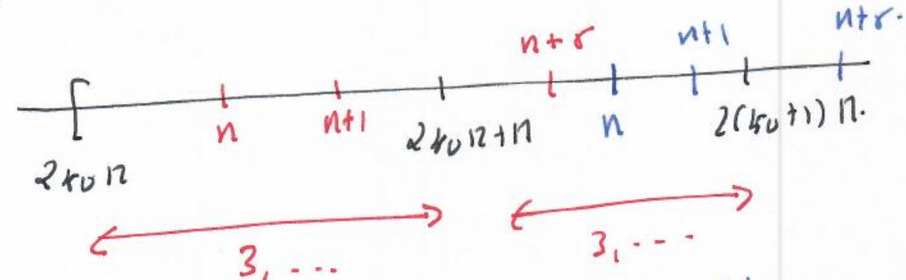
SI $b>1$, $b=1+\varepsilon$, $(1+\varepsilon)^n \ge \binom{n}{3}\varepsilon^3 =$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}\varepsilon^3$$

ASÍ $\frac{(1+\varepsilon)^n}{n^2} \ge \frac{n(n-1)(n-2)}{6n^2}\varepsilon^3 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

PROBLEMA 15:]

a) PARA $n\in\mathbb{N}$ $\exists k_0$ CON $n\in[2k_0\pi, 2(k_0+1)\pi]$



EN TODO CASO $\text{sig}\operatorname{sen} n \ne \text{sig}\operatorname{sen}(n+k)$

LUEGO $n\operatorname{sen} n$ CAMBIA DE SIGNO Y $n\uparrow\infty$

LUEGO NO EXISTE $\lim_{n\to\infty} n\operatorname{sen} n$.

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+1/n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

PROBLEMA 16:] SEA (x_n) NO ACOTADA SUPERIORMENTE; ASÍ

SUPONGAMOS NO ACOTADA, LUEGO $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$.

PARA TODO $k\in\mathbb{N}$ $\exists\, x_{n_k} > k$,

PROBLEMA 17:] a) $\Rightarrow$ b) SI $x_n \to x_0$, PARA $\varepsilon>0$ $\exists\, \delta>0$ TAL QUE SI $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, PARA $\delta>0$ $\exists\, n_0 : n\ge n_0$ $|x_0-x_n|<\delta \Rightarrow |f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$

a) $\Leftarrow$ b) SI $\exists\, x_n\to x_0$ TAL QUE $f(x_n)\not\to f(x_0)$, CLARAMENTE a) NO ES CIERTO.

PROBLEMA 18:

$A = \{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq \sqrt{\frac{9}{4}x^2 - 1} < \sqrt{77/4} \} =$

$= \{ x \in \mathbb{R} : 0 \leq \frac{9}{4}x^2 - 1 < 77/4 \} =$

$= \{ x \in \mathbb{R} : \frac{4}{9} \leq x^2 < (77/4 + 1)\frac{4}{9} = 9 \} =$

$= (-3, 3) - (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

- $\frac{3n-1}{n} = 3 - \frac{1}{n} \in A \ \forall n$
- $\frac{-2n+3}{3n} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{n} \in A \ \forall n$
- $\frac{2n+3}{3n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{n} \notin A \ \forall n \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{n} \to \frac{2}{3} \in A$
- $\frac{1}{2n} \to 0 \quad \frac{1}{2n} \notin A$ y $\frac{1}{2n} \to 0 \notin A$

PROBLEMA 19:

$|x - x_{2n-1}| = |x - x_{2n} + x_{2n} - x_{2n-1}| \leq$

$\leq |x - x_n| + |x_{2n} - x_{2n-1}| \leq |x - x_n| + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Luego $x_{2n-1} \to x$. Por el ejercicio 8.

$(x_n) \to x$, luego una subsucesión

suya $(x_{3n}) \xrightarrow[n \to \infty]{} x$.

PROBLEMA 20: $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ con $a_n \geq 0$

Así $\lambda \geq 0$; sea $r > \lambda \geq 0$, existe $n_0 : n \geq n_0$

tendremos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r \iff a_{n+1} < r a_n$

y así $a_{n+1} < r a_n < r^2 a_{n-1} < \dots < r^{(n+1)-n_0} a_{n_0} = \frac{r^{n+1}}{r^{n_0}} a_{n_0}$

Por tanto $\sqrt[n+1]{a_{n+1}} < \frac{r}{\sqrt[n+1]{r^{n_0} a_{n_0}}} \quad \forall n > n_0$

Sabemos que para $s > 0 \quad \sqrt[n]{s} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

(Ejercicio 2 hoja sucesiones numéricas)

Con esto vemos que para cada $r > \lambda \ \exists n_0$

tal que $\sqrt[n+1]{a_{n+1}} < r \quad \forall n \geq n_0$

LUEGO SI $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lambda$.

AHORA SI $\lambda = 0$ Y COMO $\sqrt[n+1]{a_{n+1}} \geq 0$, TENDRÍAMOS

QUE $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{a_{n+1}} = 0$

SI $\lambda > 0$ Y $\lambda > s > 0$

$\exists n_0 : n \geq n_0$ $\quad s^{n+1} \frac{a_{n_0}}{s^{n_0}} < a_{n+1}$.

Y ASÍ $\quad s \sqrt[n+1]{\frac{a_{n_0}}{s^{n_0}}} < \sqrt[n+1]{a_{n+1}} \quad \forall n \geq n_0$

POR TANTO $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{a_{n+1}} = \lambda$

APLICACIÓN.

a) $\sqrt[n]{n!}$ $\qquad \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

LUEGO $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

b) $$\frac{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

($\frac{1}{n+1} \to 0$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$)

LUEGO $\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

PROBLEMA 21:)

a) $a_1 = 1 \qquad a_n = 4n + a_{n-1}$ SUCESIÓN RECURRENTE.

CLARAMENTE (a_n) ES CRECIENTE Y NO ESTÁ ACOTADA

$(a_n > 4n)$.

c) PARA $n=1$ $\quad |1 - 2\cdot 1^2| = 1 < 2\cdot 1$. CIERTO

AHORA SUPONGO CIERTO QUE $|a_n - 2n^2| < 2n$.

$$|a_{n+1} - 2(n+1)^2| = |a_n + 4n - 2n^2 - 4n - 2|$$
$$< 2n + 2 = 2(n+1).$$

d) AHORA $\quad \left|1 - \frac{a_n}{2n^2}\right| = \left|\frac{2n^2 - a_n}{2n^2}\right| < \frac{2n}{2n^2} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

LUEGO $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2n^2} = 1$

PROBLEMA 22: SEA $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$

LUEGO $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2n.$

ASÍ $a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2n + \ln n =$

$$= a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} + \ln \frac{n}{2n} =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2.$$

TOMANDO LÍMITE $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2 = \lim_{n\to\infty} a_{2n} - a_n = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln 2.}$$

PROBLEMA 23: ASUMIENDO QUE CONOCEMOS LOS LOGARITMOS Y LAS EXPONENCIALES

$$\ln(\sqrt[2]{2}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}) = \sum_{k=1}^{n} \ln \sqrt[2^k]{2} = \sum_{k=1}^{n} \ln (2)^{\frac{1}{2^k}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \ln 2 = \ln 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \ln 2 \, \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - 1/2}$$

SUMA DE n TÉRMINOS DE LA SERIE GEOMÉTRICA

TOMANDO LÍMITE

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\sqrt[2]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}) = \lim_{n\to\infty} \ln 2 \, \frac{1/2 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1/2} = \ln 2.$$

COMO e^x ES UNA FUNCIÓN CONTINUA (VER EL EJERCICIO 17:).

$$\lim_{n\to\infty} e^{\ln(\sqrt[2]{2}\,\sqrt[4]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2})} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2} = e^{\ln 2} = 2$$