LA ESFERA DE RIEMANN

$\mathbb{C}$ SE PUEDE VER COMO UNA ESFERA

1º] $\mathbb{C}$ ES UN ESPACIO MÉTRICO LOCALMENTE COMPACTO

(ASÍ $\forall a \in \mathbb{C}$ $\{\overline{D(a, 1/n)}\}_{n=1}^{\infty}$ ES UNA BASE DE ENTORNOS COMPACTOS).

2º] UN CONJUNTO DE ESTAS CARACTERÍSTICAS SE PUEDE COMPACTIFICAR POR UN PUNTO

COMPACTIFICACIÓN DE ALEJANDROV.

$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \overset{\text{DEF}}{=} \overline{\mathbb{C}}$ DONDE UNA BASE DE ENTORNO DE ∞ ES $\{\overline{\mathbb{C}} - D(a, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

3º] PROPOSICIÓN:

SEA $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| = 1\}$.

DOTADO DE LA TOPOLOGÍA USUAL DE $\mathbb{R}^3$ RESTRINGIDA A S^2. EXISTE

$$T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow S^2$$ UNA APLICACIÓN CONTINUA

T BIYECTIVA Y CON INVERSA CONTINUA.

ASÍ PODEMOS IDENTIFICAR $\overline{\mathbb{C}}$ CON S^2.

ÚTIL PARA VISUALIZAR TRANSFORMACIONES DEL PLANO SOBRE LA ESFERA

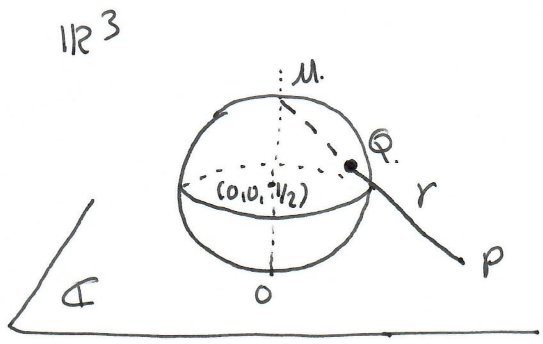
PROYECCION ESTEREOGRÁFICA

PARA PROBAR 3: HACEMOS EL CAMBIO

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1/2)^2 = \tfrac{1}{4}\}$$

ESFERA DE CENTRO $(0,0,1/2)$ Y RADIO $1/2$

(HOMEOMORFA A LA ESFERA S^2 HABITUAL)



SEA $M = (0,0,1) \in S^2$

SEA $P \in \mathbb{C}$, $P = x + yi$

SEA $r = \{t(x,y,-1) + (0,0,1) : t \in \mathbb{R}\}$

LA RECTA QUE UNE P Y M

SEA $Q \in S^2 \setminus \{M\}$ LA INTERSECCION DE r CON S^2

$$\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow S^2 \setminus \{M\}$$
$$P \longrightarrow Q.$$

DEF A φ SE LE LLAMA PROYECCIÓN ESTEREOGRAFICA

SI $P = (x,y)$.

$Q = r \cap (S^2 \setminus \{M\})$ ASI

$$(tx, ty, 1-t) \in S^2$$

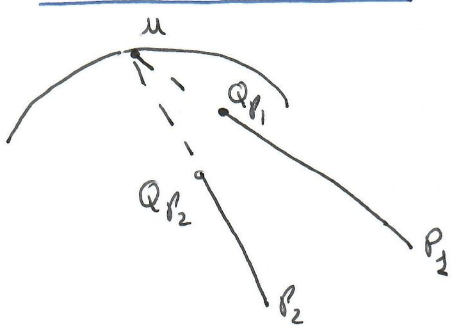
$$\iff (tx)^2 + (ty)^2 + (1 - t - 1/2)^2 = 1/4$$

$$\iff t^2[x^2 + y^2 + 1] - t + 1/4 = 1/4$$

Y ASI $\begin{cases} t = 0 \\ \text{ó} \\ t = \dfrac{1}{x^2+y^2+1} \end{cases}$

$$\boxed{\text{POR TANTO } \varphi(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1} \right).}$$

Π ES INYECTIVA



SI $\Pi(P_1) = \Pi(P_2)$.

LAS RECTAS QUE UNEN P_1 Y M Y P_2 Y M SON IGUALES Y POR TANTO SU INTERSECCIÓN CON $\mathbb{C}$ ES ÚNICA; ASÍ $P_1 = P_2$

Π ES SOBREYECTIVA

SEA $Q \in S^2 \setminus M$, LA RECTA QUE UNE M Y Q CORTA A $\mathbb{C}$ EN UN ÚNICO PUNTO ESTO ES ASÍ YA QUE $1 > Q_3$

$(r \cap \mathbb{C} = \emptyset \iff \forall Q' \in r \quad Q'_3 \equiv cte)$

Π ES CONTINUA

$$\Pi_1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2+1}$$ CONTINUA EN TODO $\mathbb{C}$

$$\Pi_2(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2+1}$$ CONTINUA EN TODO $\mathbb{C}$

$$\Pi_3(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$$ CONTINUA EN TODO $\mathbb{C}$

DEF SE DEFINE

$$\overline{\Pi} \quad \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow S^2$$

$$P \longrightarrow \overline{\Pi}(P) = \begin{cases} \Pi(P) & \text{SI } P \neq \infty \\ M & \text{SI } P = \infty \end{cases}$$

$\overline{\Pi}$ ES EL HOMEOMORFISMO QUE ESTAMOS BUSCANDO

$\overline{\pi}$ ES CONTINUA

$\overline{\pi}$ COINCIDE CON π EN $\mathbb{C}$ Y SOBRE $\mathbb{C}$ LA TOPOLOGÍA DE $\mathbb{C}$ Y $\overline{\mathbb{C}}$ COINCIDEN.

SOLO HAY QUE PROBAR QUE $\overline{\pi}$ ES CONTINUA EN ∞.

SEA $D(M, r) \cap S^2$ UN ENTORNO DE M.
$r > 0$

COMO $\|\overline{\pi}(p) - \overline{\pi}(\infty)\| = \|\pi(p) - (0,0,1)\| =$

$$= \left[\frac{x^2}{(x^2+y^2+1)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2+1)^2} + \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1} - 1 \right)^2 \right]^{1/2} =$$

$$= \left[\frac{x^2}{(x^2+y^2+1)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2+1)^2} + \frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} \right]^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

AHORA TOMANDO $n_0 \in \mathbb{N}$ CON $\frac{1}{n_0} < r$

$\forall (x,y) \in \overline{\mathbb{C}} - D(0,n)$, ES DECIR $\sqrt{x^2+y^2} \geq n$.

SE TIENE QUE

$$\|\pi(x) - (0,0,1)\| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1/n < r.$$

$\overline{\pi}^{-1}$ ES CONTINUA

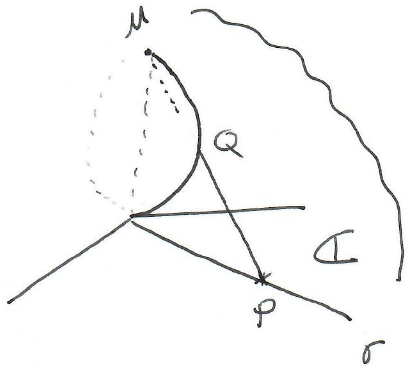
COMPROBAR QUE

$$\pi^{-1} \quad S^2 \setminus \{M, 0\} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0\}$$

$$(x, y, z) \longrightarrow \pi^{-1}(x) = \left(\frac{x}{1/2 - \sqrt{1/4 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{1/2 - \sqrt{1/4 - x^2 - y^2}} \right)$$

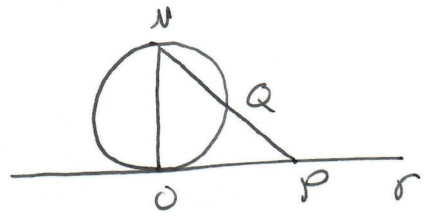
OBSERVACIONES

A) Π TRANSFORMA LAS RECTAS QUE PASAN POR EL ORIGEN DE $\mathbb{C}$ EN MERIDIANOS DE S^2



LA INTERSECCION DE S^2 CON EL PLANO QUE CONTIENE A r RECTA VECTORIAL DE $\mathbb{C}$ Y EL PUNTO M ES UN MERIDIANO

GIRANDO EL DIBUJO

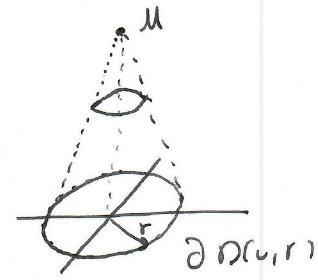


PROYECCION ESTEREOGRAFICA DE UNA CIRCUNFERENCIA EN UNA RECTA.

B) Π TRANSFORMA CIRCUNFERENCIAS DE CENTRO EL ORIGEN DE $\mathbb{C}$ EN PARALELOS DE S^2

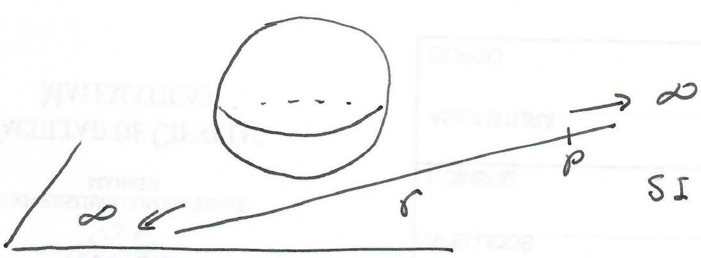
SEA $\partial D(0,r)$, ASI $\forall z \in \partial D(0,r)$ $\|z\| = r$

$$\Pi(z) = \left(\frac{\mathrm{Re}\, z}{r^2+1}, \frac{\mathrm{Im}\, z}{r^2+1}, \underbrace{\frac{r^2}{r^2+1}}_{\text{Constante}} \right)$$



$$Y \quad \left\| \left(\frac{\mathrm{Re}\, z}{r^2+1}, \frac{\mathrm{Im}\, z}{r^2+1} \right) \right\| = \frac{r}{r^2+1} \equiv cte.$$

C) TODA RECTA DE $\mathbb{C}$ AL TRANSFORMARSE POR Π PASA POR $M \in S^2$



SEA $P \in r$

$$\Pi(P) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1}, \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1} \right)$$

SI $P \longrightarrow \infty$

$$\Pi(P) \longrightarrow (0,0,1).$$

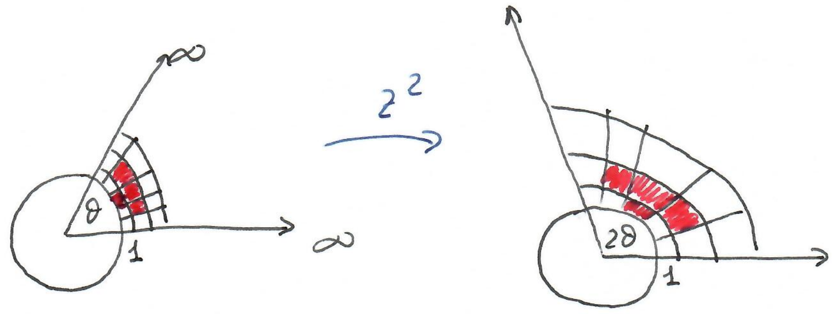
EJEMPLO DE REPRESENTACION DE TRANSFORMACIONES DEL PLANO

SEA $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longrightarrow f(z) = z^2$

SI $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$z^2 = |z|^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$



ó