LOCALIZACIÓN DE CEROS Y POLOS DE FUNCIONES HOLOMORFAS Y MEROMORFAS

SI $f\ \Omega \to \mathbb{C}$, Ω ABIERTO Y CONEXO Y $f \in H(\Omega)$, SI $\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$ LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(p,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

$\operatorname{Ind}_{\partial D(p,r)}(z) = 1$
ORIENTADA POSITIVAMENTE

$\forall z \in D(p,r)$, NOS PERMITE CONOCER f CONOCIENDO SOLAMENTE LOS VALORES QUE TOMA EN EL BORDE DEL DOMINIO.
AHORA LO QUE VAMOS A DESCUBRIR ES UNA FÓRMULA SIMPLE QUE INDICA EL NÚMERO DE CEROS DE f (INCLUIDA LA CORRESPONDIENTE MULTIPLICIDAD DE CADA UNO) EN TÉRMINOS DE LOS VALORES DE f Y f' EN EL BORDE DEL DOMINIO.

z_0 CERO ORDEN m

$f(z) = \sum_{k \geq m} a_n (z - z_0)^m =$

$= (z - z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} (z - 0)^k$

ASÍ $g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^m}$

NO TIENE CERO EN z_0

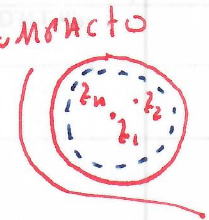
TEOREMA SEA $f \in H(\Omega)$, Ω ABIERTO, $f \not\equiv 0$, Y SEA $D(p,r) \subseteq \Omega$. DONDE $z_1 \ldots z_n$ SON LOS CEROS DE f EN $D(p,r)$, INCLUIDA LAS MULTIPLICIDADES, DE MODO QUE $\exists r' > r$ CON $D(p,r') \subseteq \Omega$ Y DONDE $f|_{D(p,r')}$ TIENE LOS MISMOS CEROS QUE $f|_{D(p,r)}$.

$\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$.

$\Leftrightarrow f|_{\partial D(p,r)} \neq 0$ EN TODO PUNTO

ENTONCES $n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$ CON $\gamma(t) = p + re^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$.

DEM SI $S \subset \overline{D(p,r')} \subset \Omega$, $S = \{z \in D(p,r') : f(z) = 0\}$.
S ES FINITO Y COMO $\partial D(p,r')$ ES COMPACTO $\exists r' > r > 0$ CON $S \subset D(p,r) \subset D(p,r')$



$f \in H(\Omega)$, Ω ABIERTO y $f \not\equiv 0$.

COMO $\overline{D(p,r)} \subset \Omega$ SEAN

$z_1 \dots z_s$ LOS CEROS DE f EN $D(p,r)$

CON MULTIPLICIDADES $n_1, n_2 \dots n_s$

[$n = n_1 + n_2 + \dots + n_s$]

y CON $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \partial D(p,r)$

ENTONCES

$$f(z) = (z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2} \dots (z-z_s)^{n_s}\, g(z)$$

CON $g \in H(\Omega)$ y $g(z) \neq 0$ $\forall z \in D(p,r)$

[NOTA $g(z) = \dfrac{f(z)}{(z-z_1)^{n_1} \dots (z-z_s)^{n_s}}$

COMO $\lim\limits_{z \to z_j} g(z)$ EXISTE $j = 1, 2 \dots s$ $\Rightarrow g \in H(\Omega)$]

POR SIMPLICIDAD PODEMOS ESCRIBIR

$$f(z) = (z-z_1) \dots (z-z_n) \cdot g(z)$$

[REPITIENDO TANTAS VECES UN CERO COMO SU MULTIPLICIDAD]

AHORA
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{f(z)} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (z-z_j) \right) g(z) + \left(\prod_{j=1}^{n} (z-z_j) \right) g'(z) \right] =$$

$$= \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \dots + \frac{1}{z-z_n} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

COMO $g(z) \neq 0$ $\forall z \in D(p,r')$ ASI $g'/g \in H(D(p,r'))$

y POR EL TEOREMA DE CAUCHY $\displaystyle\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = 0$

ASI
$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_\gamma \frac{1}{z-z_1} + \dots + \frac{1}{z-z_n} + \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_\gamma \frac{1}{z-z_i}\, dz = n\, 2\pi i$$

— · —

OBSERVACIÓN: EN ESTA PRUEBA SOLO SE USA QUE γ ES UNA CURVA SIMPLE ORIENTADA POSITIVAMENTE, NO ES SIGNIFICATIVO QUE SEA UNA CIRCUNFERENCIA, POR DEFINICIÓN DE ÍNDICE RESPECTO DE UNA CURVA.

COROLARIO Si $f \in H(\Omega)$ Ω abierto y $a \in \mathbb{C}$ con $f(z) \neq a$ $\forall z \in \partial D(p,r)$ con $\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$.
Entonces $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-a}\,d\zeta$ es el número de soluciones (multiplicidad incluida) de la ecuación $f(z)=a$ en $D(p,r)$

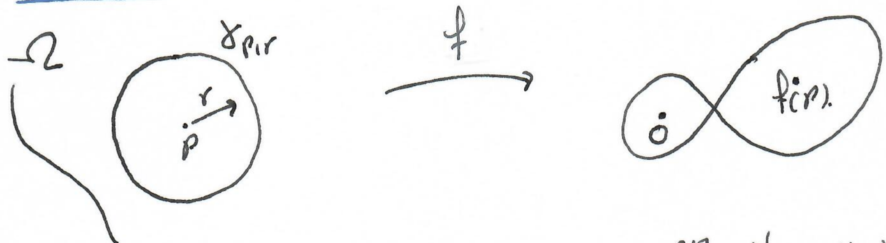
$\boxed{\text{PRINCIPIO DEL ARGUMENTO}}$ (Ahlfors pg. 130 y siguientes)

La fórmula $\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-p|=r} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = n.$

se conoce como principio del argumento.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA:

$\Gamma = f \circ \gamma_{p,r}$



Si $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \gamma_{p,r}^*$ $\Rightarrow 0 \notin \Gamma^*$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-p|=r} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f'(\gamma_{p,r}(t))\cdot\gamma_{p,r}'(t)}{f(\gamma_{p,r}(t))}\,dt =$$

$$\underset{=}{\text{DEF}}\ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\zeta}\,d\zeta = \text{Ind}_\Gamma(0).$$

Es decir el número de ceros de f en $D(p,r)$
es igual al número de vueltas que da
la curva $f(\gamma_{p,r})$ (transformación de $\gamma_{p,r}$
por f). al cero.