PRINCIPIO DEL ARGUMENTO PARA FUNCIONES MEROMORFAS

TEOREMA: SI $f\ \Omega - \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ ES UNA FUNCION QUE NO SE ANULA EN $\Omega - \{a\}$ CON UN POLO DE ORDEN n EN "a" Y SI $\overline{D(a,r)} \subseteq \Omega$, ENTONCES

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = -n.$$

DEM

SEA $g(z) = \frac{1}{f(z)} \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega - \{a\}$

Y g TIENE UN CERO DE ORDEN n EN $z = a$

ASI $n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{-\frac{f'(z)}{f^2(z)}}{1/f(z)}\,dz$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

COROLARIO SI $f \in \mathcal{H}(\Omega - \{a_1 \dots a_s\})$ ES UNA FUNCION MEROMORFA CON POLOS $a_1 \dots a_s$ CON ORDENES $n_1, n_2 \dots n_s$, $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega - \{a_1 \dots a_s\}$ Y $a_1 \dots a_s \in D(p,r)$, $\overline{D(p,r)} \subseteq \Omega$, SE SIGUE QUE

$$-\sum_{i=1}^{s} n_i = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-p|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

DEM $\frac{1}{f}$ TIENE CEROS EN $a_1 \dots a_s$ DE ORDENES $n_1 \dots n_s$. ...etc.

TEOREMA Sea $f \in H(\Omega - A)$ una función meromorfa, con polos en $A \subseteq \Omega$, sea $\overline{D(p,r)} \subset \Omega$ de modo que f no tenga ni ceros ni polos en $\partial D(p,r)$ entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-p|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{k} n_j - \sum_{s=1}^{t} m_s$$

donde $n_1 n_2 \dots n_k$ son las multiplicidades de cada cero de f en $D(p,r)$ y $m_1 \dots m_t$ los órdenes de cada polo de f en $D(p,r)$.

DEM Como sabemos k y t son finitos luego se puede encontrar $\varepsilon > 0$ con $\{D(z_j,\varepsilon), D(p_s,\varepsilon)\}_{\substack{j=1\dots k\\ s=1\dots t}}$

una familia de discos centrados en los ceros y polos de f en $D(p,r)$ todos ellos disjuntos dos a dos.

Sea el ciclo $\Gamma = \partial D(p,r) - \sum_{j=1}^{k} \partial D(z_j,\varepsilon) - \sum_{s=1}^{t} \partial D(p_s,\varepsilon)$

Así $D(p,r) \setminus (\{z_1 \dots z_k\} \cup \{p_1 \dots p_t\}) =$

$= \Omega'$ es un abierto conexo

y tal que $\forall a \notin \Omega'$ $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0$

Así como $\frac{f'}{f} \in H(\Omega')$, por el teorema de Cauchy global $\quad 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz =$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(p,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(z_j,\varepsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \sum_{s=1}^{t} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(p_s,\varepsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(p,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz - \sum_{j=1}^{k} n_j - \sum_{s=1}^{t} -m_s \quad \text{y despejando}$$

corolarios anteriores

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(p,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{j=1}^{k} n_j - \sum_{s=1}^{t} m_s$$

— ◦ —

TEOREMA SEA $f \in H(\Omega)$, Ω ABIERTO Y $f \not\equiv ct$

CONEXO Y $z_0 \in \Omega$. CON $f(z_0) = w_0$.

SIENDO z_0 UNA RAÍZ DE ORDEN n DE LA ECUACIÓN $f(z) - w_0 = 0$. PARA $\varepsilon > 0$ SUFICIENTEMENTE PEQUEÑO, EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE $\forall\, a \in D(w_0, \delta)$ LA ECUACIÓN $f(z) = a$ TIENE EXACTAMENTE n RAÍCES EN $D(z_0, \varepsilon)$.

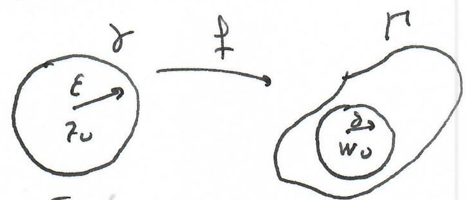
$$f(z) = w_0 + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{k!}$$

DEM SI $f \equiv ct$ EL RESULTADO ES TRIVIAL ~~NO TIENE SENTIDO~~

SI $f \not\equiv ct$ POR LOS TEOREMAS DE IDENTIDAD EXISTE $\varepsilon > 0$ TAL QUE $\overline{D(z_0, \varepsilon)} \subseteq \Omega$ Y $\forall z \in \overline{D(z_0,\varepsilon)}$

$f(z) \neq w_0$.

SEA $\gamma = \partial D(z_0, \varepsilon)$ ORIENTADA POSITIVAMENTE Y SEA $\Gamma = f \circ \gamma$



COMO $w_0 \notin \Gamma$ Y Γ CERRADO

$\exists \delta > 0$ CON $D(w_0, \delta) \cap \Gamma = \emptyset$

SEA $a \in D(w_0, \delta)$ Y SEA $g(z) = f(z) - a$.

ASI $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a}\, dz$ ES EL NUMERO DE CEROS DE g, DE RAÍCES DE $f(z) - a = 0$, EN $D(z_0, \varepsilon)$.

ADEMAS $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}{f(\gamma(t)) - a}\, dt =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - a}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - w_0}\, d\zeta = n.$$

$\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = \mathrm{Ind}_\Gamma(w_0)$ POR ESTAR EN LA MISMA COMPONENTE CONEXA

POR EL PRINCIPIO DEL ARGUMENTO

COROLARIO EN LAS CONDICIONES ANTERIORES SI $a \neq w_0$ PODEMOS ASEGURAR QUE LAS n CEROS DE $f(z) - a = 0$ SON SIMPLES.

$\exists \epsilon' < \epsilon$ y δ' tal que si $a \in D(w_0, \delta')$

PRÁCTICA

DEM SI $f'(z_0) = 0$, COMO $f' \in H(\Omega)$ $\exists \epsilon'$ CON

$$D(z_0, \epsilon') \subseteq \Omega \quad y \quad f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in D(z_0, \epsilon') \setminus \{z_0\}$$

SI $f'(z_0) \neq 0$, POR SER f' CONTINUA $\exists \epsilon' > 0$ CON

$$D(z_0, \epsilon') \subseteq \Omega \quad y \quad f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in D(z_0, \epsilon')$$

ASÍ SI $z_1 \in D(z_0, \epsilon')$ Y ES RAÍZ DE $f(z) - a = 0$

POR SER f ANALÍTICA EN z_1

$$f(z) = a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_1)}{k!} (z - z_1) \quad \text{CON } f'(z_1) \neq 0$$

LO QUE PRUEBA QUE z_1 ES UNA RAÍZ SIMPLE.

COROLARIO SI $f \in H(\Omega)$ Ω ABIERTO Y $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in \Omega$, EXISTE V Y W ENTORNOS ABIERTOS DE z_0 Y $f(z_0)$ TALES QUE $f: V \to W$ ES BIYECTIVA.

PRÁCTICA

DEM COMO $f'(z_0) \neq 0$ $f(z) - f(z_0) = 0$ TIENE UNA RAIZ SIMPLE EN z_0 Y POR EL TEOREMA ANTERIOR $\exists \epsilon > 0$ Y $\delta > 0$ TALES QUE $\forall w \in D(f(z_0), \delta) > 0$ $\exists!\, z \in D(z_0, \epsilon)$ CON $f(z) = w$

ASÍ $f: D(z_0, \epsilon) \cap f^{-1}(D(f(z_0), \delta)) \longrightarrow D(f(z_0), \delta)$

ES BIYECTIVA

COROLARIO (TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA) SI $f \in H(\Omega)$, Ω ABIERTO Y $f \neq cte$, ENTONCES SE TIENE QUE $f(A)$ ES ABIERTO $\forall A \subseteq \Omega$, A ABIERTO

PRÁCTICA

DEM SEA $w_0 \in f(A)$, ASÍ $\exists z_0 \in A$ CON $f(z_0) = w_0$ POR EL TEOREMA ANTERIOR $\exists \epsilon, \delta > 0$ TALES QUE $D(z_0, \epsilon) \subseteq A$ Y $\forall w \in D(w_0, \delta)$ $\exists z \in D(z_0, \epsilon)$ CON $f(z) = w$

ASÍ $D(w_0, \delta) \subseteq f(A)$ c.q.d

PRÁCTICA

COROLARIO SI $f \in H(\Omega)$, CON Ω ABIERTO Y CONEXO Y f INYECTIVA ENTONCES $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$.

DEM SI $\exists z_1$ CON $f'(z_1) = 0$, ENTONCES $g(z) = f(z) - f(z_1)$, $g'(z) = f'(z)$ TIENE UNA RAIZ DOBLE EN z_1 Y POR EL COROLARIO DE ARRIBA f NO SERIA INYECTIVA.

COROLARIO (PRINCIPIO DEL MÁXIMO).

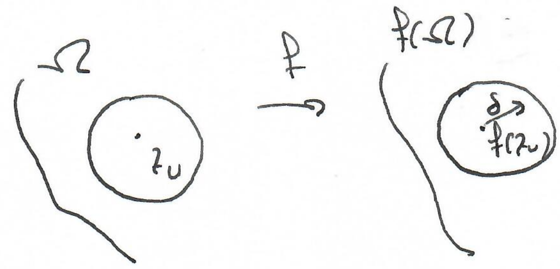
SI $f \in H(\Omega)$, Ω ABIERTO Y CONEXO, Y $f \not\equiv cte$ ENTONCES $|f|$ NO ALCANZA SU MÁXIMO EN Ω.

PRACTICA

DEM $|f|$ $\Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$. $|f|$ CONTINUA.

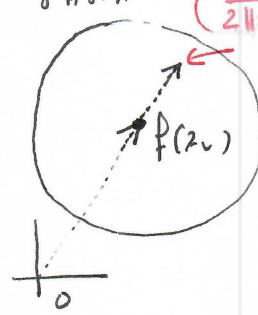
SI PARA $z_0 \in \Omega$ $|f(z_0)| \geq |f(w)|$ $\forall w \in \Omega$.

ENTONCES



POR EL RESULTADO ANTERIOR, f ALCANZA TODOS LOS VALORES DE $D(f(z_0), \delta)$ PARA UN CIERTO $\delta > 0$ ASI

$\left(\frac{\delta}{2\|f(z_0)\|} + 1\right) f(z_0)$



$$\frac{\delta}{2} \frac{f(z_0)}{\|f(z_0)\|} + f(z_0) \in D(f(z_0), \delta)$$

Y $$\left| \frac{\delta}{2} \frac{f(z_0)}{\|f(z_0)\|} + f(z_0) \right| > |f(z_0)|.$$

LO QUE LLEVA A CONTRADICCIÓN.

COROLARIO (PRINCIPIO DEL MÍNIMO).

SI $f \in H(\Omega)$, Ω ABIERTO Y CONEXO; CON $f \not\equiv cte$ Y $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$, ENTONCES $|f|$ NO ALCANZA SU MÍNIMO EN Ω.

DEM CONSIDERAR $\frac{1}{f}$ Y USAR EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO.