EL TEOREMA DE ROUCHÉ

EL PRINCIPIO DEL ARGUMENTO PERMITE COMPARAR LA CANTIDAD DE CEROS DE FUNCIONES "PRÓXIMAS" ENTRE SI.

TEOREMA DE ROUCHÉ:
SEAN $f, g\ \Omega \to \mathbb{C}$, $f, g \in H(\Omega)$. SEA $\overline{D(b,r)} \subseteq \Omega$ DE MODO QUE $\forall z \in \partial D(b,r)$ SE TIENE

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)|. \quad (*)$$

ENTONCES

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(b,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(b,r)} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz.$$

POR TANTO LA CANTIDAD DE CEROS DE f Y DE g (INCLUIDAS MULTIPLICIDADES) EN EL DISCO $D(b,r)$ ES LA MISMA.

DEM DE LA DESIGUALDAD ESTRÍCTA $(*)$ SE SIGUE QUE $g(z) \neq 0$ Y $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \partial D(b,r)$

SI $\partial D(b,r)$ LA CONSIDERAMOS ORIENTADA POSITIVAMENTE

SE DEFINE PARA $t \in [0,1]$.

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(b,r)} \frac{f'(z) + t(g'(z) - f'(z))}{f(z) + t(g(z) - f(z))}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(b,r)} \frac{(1-t)f'(z) + t g'(z)}{(1-t)f(z) + t g(z)}\,dz$$

VEAMOS QUE
Φ ES CONTINUA
- $\Phi(t) \in \mathbb{N}$.
- $\Phi \equiv$ cte.
Y ASÍ
- $\Phi(0) = \Phi(1)$.

SEA F $\partial D(b,r) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$(z,t) \longrightarrow F(z,t) = \frac{(1-t)f'(z) - t g'(z)}{(1-t)f(z) - t g(z)}.$$

F ES UNIFORMEMENTE CONTINUA EN $\partial D(b,r) \times [0,1]$.
YA QUE F ES CONTINUA Y $\partial D(b,r) \times [0,1]$ COMPACTO

VEAMOS QUE G ES CONTINUA

$$|(1-t)f(z)+tg(z)| = |f(z)+t(g(z)-f(z))| \geq$$

$$\geq \big|\, |f(z)| - t|g(z)-f(z)| \,\big| \geq |f(z)| - |g(z)-f(z)| > 0$$

$\underline{||a|-|b|| \leq |a+b|}$ $\quad t\in[0,1] \quad$ POR (*)

ASÍ $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ TAL QUE SI $\|(z,t)-(z,s)\| = |t-s| < \delta$

ENTONCES $\|G(z,t)-G(z,s)\| < \frac{\varepsilon}{r}$

Y

$$|\Phi(t)-\Phi(s)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(p,r)} \|G(z,t)-G(z,s)\|\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |G(re^{ix}+p,t)-G(re^{ix}+p,s)|\cdot r\, dx = \varepsilon$$

LUEGO Φ ES UNIFORMEMENTE CONTINUA EN $[0,1]$.

COMO $\forall t\in[0,1]$, $(1-t)f(z)+tg(z) \in H(\Omega)$ Y

$$(1-t)f(z)+tg(z) \neq 0 \quad \forall z\in \partial D(p,r)$$

SE SIGUE que $\Phi(t)\in \mathbb{N}$.
(POR EL PRINCIPIO DEL ARGUMENTO APLICADO A $(1-t)f(z)+tg(z)$ SOBRE $D(p,r)$).

Y COMO Φ ES CONTINUA Y TOMA VALORES ENTEROS.

$$\Phi(t) \equiv cte$$

Y COMO $\Phi(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(p,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$

Y $\Phi(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(p,r)} \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz$

QUEDA PROBADO EL RESULTADO.

(PRUEBA ALTERNATIVA)

OBSERVACIÓN: SEA $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \to \gamma(t) = p + re^{it}$, SEA $\gamma_1 = f\circ\gamma$ Y $\gamma_2 = g\circ\gamma$ CURVAS CERRADAS CON $|\gamma_2(s)-\gamma_1(s)| < |0-\gamma_1(s)| = |\gamma_1(s)|$ $\forall s\in[0,2\pi]$ POR HIPÓTESIS; ASÍ $\mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0)$ Y POR EL PRINCIPIO DEL ARGUMENTO SE CONCLUYE.

EJEMPLO

APLICACIÓN TÍPICA DEL TEOREMA DE ROUCHÉ

SEA $f(z)=z^7+5z^3-z-2$ ¿CUÁNTOS CEROS TIENE ESTE POLINOMIO EN $D(0,1)$?

COMO

$$|z^7+5z^3-z-2-(5z^3)|=$$

$$=|z^7-z-2|\le 4 \quad \forall z\in\partial D(0,1)$$

Y ASÍ $\quad 4<|5z^3| \quad \forall z\in\partial D(0,1)$

LUEGO POR EL TEOREMA DE ROUCHÉ LAS RAÍCES DE z^7+5z^3-z-2 EN $D(0,1)$ SON LAS MISMA QUE TIENE $5z^3$: ES DECIR 3 (INCLUIDA LA MULTIPLICIDAD)

TEOREMA (DE HURWITZ):

SEA $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ UN ABIERTO CONEXO Y SEA $(f_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$, UNA SUCESIÓN DE FUNCIONES HOLOMORFAS TALES QUE:

$$f_j(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega \text{ y } \forall j \in \mathbb{N}.$$

SI (f_j) CONVERGE UNIFORMEMENTE SOBRE LOS COMPACTOS DE Ω A UNA FUNCIÓN f ENTONCES O BIEN $f \equiv 0$ O BIEN $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$.

DEM SUPONGAMOS $f \not\equiv 0$.

SEA $z_0 \in \Omega$ Y SEA $r > 0$ CON $\overline{D(z_0, r)} \subseteq \Omega$.

COMO $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. (VISTO COMO CONSECUENCIA DEL TEOREMA DE MORERA)

r SE PUEDE TOMAR DE MODO QUE $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \partial D(z_0, r)$

(EN OTRO CASO POR LOS TEOREMAS DE IDENTIDAD $f \equiv 0$, LO QUE NO ES EL CASO)

POR SER $\partial D(z_0, r)$ COMPACTO $\exists z' \in \partial D(z_0, r)$

CON $|f(z')| = \min\{ |f(z)| : |z - z_0| = r \} = \varepsilon > 0$

PARA ESTE $\varepsilon > 0$, EXISTE n_0 : $\forall n \geq n_0$.

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon < |f(z)| \quad \forall z \in \partial D(z_0, r).$$

Y ASÍ POR EL TEOREMA DE ROUCHÉ f TIENE CEROS EN $D(z_0, r)$ COMO f_n CON $n \geq n_0$

POR TANTO $f(z_0) \neq 0 \quad \forall z_0 \in \Omega$. c.q.d.