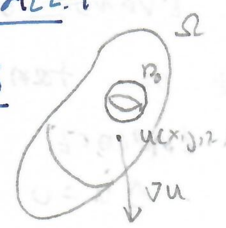
EL PROBLEMA DE DIRICHLET

FUNCIONES ARMÓNICAS



SI ES ESTACIONARIO EL PROCESO $\forall D_0 \subseteq \Omega$

$$\int_{\partial D_0} (-\nabla u)\cdot n\, ds = 0 \quad \text{|| T. GAUSS}$$

$$-\int_{D_0} \operatorname{div}(\nabla u)\, dx\,dy\,dz = -\int_{D_0} \Delta u\, dx\,dy\,dz \Rightarrow \boxed{\Delta u = 0}.$$

(*) MIRAR DETRÁS, TRATAMIENTO REAL DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE Y DE POISSON.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \\ u(Re^{i\theta}) = f(\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi], \ f \text{ CONTINUA.} \end{cases}$$

SE CONOCE CON EL NOMBRE DE PROBLEMA DE DIRICHLET

DEF UNA FUNCIÓN $u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega)$ Ω ABIERTO, SE LLAMA ARMÓNICA SI VERIFICA LA ECUACIÓN DE LAPLACE, E.D.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$f \in H(\Omega) \iff$ a) f ES DIFERENCIABLE EN Ω b) SE VERIFICAN LAS CONDICIONES DE CAUCHY-RIEMANN.

OBSERVACIÓN SEA $f \in H(\Omega)$, Ω ABIERTO, CON $f = u + iv$, ENTONCES u Y v SON ARMÓNICAS.

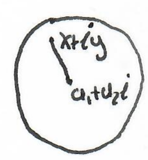
DEM COMO u Y v SATISFACEN LAS ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Y COMO u Y $v \in C^\infty(\Omega)$. YA QUE f ES ANALÍTICA

ASÍ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \underset{\text{TEOREMA DE SCHWARZ}}{=} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

OBSERVACIÓN SI $u: D(a,r) \longrightarrow \mathbb{R}$, $u \in C^2(D(a,r))$ Y ARMÓNICA, ENTONCES $\exists f \in H(D(a,r))$ CON $\operatorname{Re} f = u$.



DEM SEA $v(x,y) = \int_{a_2}^{y} u_x(x,t)\,dt - \int_{a_1}^{x} u_y(s,a_2)\,ds$; $a = a_1 + i a_2$

$$\begin{cases} \text{SI } v_y(x,y) = u_x(x,y) & \int_{a_2}^{y} v_y(x,t)\,dt = v(x,y) - v(x,a_2) = \int_{a_2}^{y} u_x(x,t)\,dt \\ \text{SI } -v_x(x,y) = u_y(x,y) & \int_{a_1}^{x} -v_x(s,a_2)\,ds = v(a) - v(x,a_2) = \int_{a_1}^{x} u_y(s,a_2)\,ds. \end{cases}$$

ASI $\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \displaystyle\int_{a_2}^{y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)\,dt - u_y(x,a_2) =$

$= \displaystyle\int_{a_2}^{y} -\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,t)\,dt - u_y(x,a_2) =$

U ARMÓNICA

$= -u_y(x,y) + u_y(x,a_2) - u_y(x,a_2) = -u_y(x,y)$

DEL MISMO MODO

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = u_x(x,y)$$

ASI $f = u + vi$ VERIFICA LAS ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN Y COMO $u, v \in C^2(D(a,r))$. f ES DIFERENCIABLE EN $D(a,r)$, POR TANTO

$$f \in D(a,r)$$

<u>COROLARIO</u> SI $u \in C^2(\Omega)$, Ω ABIERTO Y u ARMÓNICA, ENTONCES $u \in C^\infty(\Omega)$.

<u>DEM</u> COMO u ES LA PARTE REAL DE UNA FUNCIÓN ANALÍTICA, ENTONCES u TAMBIÉN ES $C^\infty(\Omega)$.

<u>PROPOSICION</u>: SI $s: \Omega \to \mathbb{R}$ ES ARMÓNICA EN Ω Y $f\; W \to \Omega$ ES HOLOMORFA EN W, ENTONCES $s \circ f\; W \to \mathbb{R}$ ES ARMÓNICA EN W.

ESTE RESULTADO DA SENTIDO MAS ADELANTE AL TEOREMA DE LA APLICACIÓN DE RIEMANN.

<u>DEM</u> SEA $R = s(u(x,y), v(x,y))$ DONDE $f = u + iv$.

¿$\Delta R = 0$? HAGAMOS CUENTAS.

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$$

AHORA

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{(1)}$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \frac{\partial v}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{(2)}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = \left[\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \frac{\partial u}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{(3)}$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \frac{\partial v}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{(4)}$$

ASI $$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} \underset{(1),(2),(3),(4)}{=} \frac{\partial S}{\partial x} \underbrace{\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]}_{0} + \frac{\partial S}{\partial y} \underbrace{\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]}_{0} +$$

$$+ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$+ \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right]}_{0} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] +$$

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

$$+ \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x} \left[2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right] =$$

$$= 2 \frac{\partial^2 S}{\partial y d s} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = 0.$$

c.q.d.

OBSERVACIÓN $f\ \overline{\Omega} \to \overline{D(0,1)}$, $f \in H(\Omega)$, BIYECTIVA CON $f'(z) \neq 0\ \forall z \in \Omega$ Y $f_{|\partial\Omega} : \partial D(0,1)$ BIYECTIVA. SEA EL PROBLEMA $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u_{|\partial\Omega} = g \end{cases}$

SI S SOLUCIÓN DE $\begin{cases} \Delta S = 0 \\ S_{|\partial D(0,1)} = g \circ f^{-1} \end{cases}$, ENTONCES $u = S \circ f$ ES SOLUCIÓN DEL PRIMER PROBLEMA.

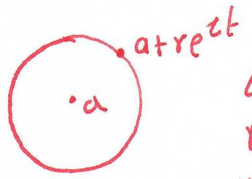
DEM $S \circ f$ ES ARMÓNICA; $S_{|\partial D(0,1)} = g \circ f^{-1} \Rightarrow S \circ f_{|\partial\Omega} = S_{|\partial D(0,1)} = g \circ f^{-1}_{|\partial D(0,1)}$
$= g_{|\partial\Omega}$.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES ARMÓNICAS

PROPIEDAD DEL VALOR MEDIO

SEA $u: \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ UNA FUNCIÓN ARMÓNICA SOBRE EL ABIERTO Ω. SI $a \in \Omega$ Y PARA $r>0$ $\overline{D(a,r)} \subseteq \Omega$, ENTONCES

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{it})\,dt.$$

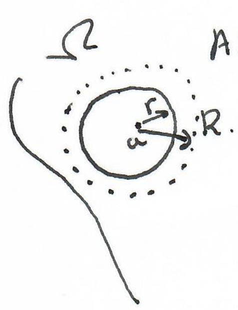


ESTA PROPIEDAD DICE QUE EL VALOR DE $u(a)$ ES "EL PROMEDIO" DE LOS VALORES QUE TOMA u ALREDEDOR DE a.

MAS ADELANTE VEREMOS QUE ESTA PROPIEDAD CARACTERIZA A LAS FUNCIONES ARMÓNICAS

DEM SEA $a \in \Omega$ Y SEA $r>0$ CON $\overline{D(a,r)} \subseteq \Omega$

ASÍ $\exists R > r$ CON $D(a,r) \subseteq \overline{D(a,r)} \subseteq D(a,R) \subseteq \Omega$



$\forall p \in \partial D(a,r)$ $\exists\, \varepsilon_p > 0$ CON $D(p,\varepsilon_p) \subseteq \Omega$; $\{D(p,\varepsilon_p)\}_{p \in \partial D(a,r)}$ RECUBRIMIENTO ABIERTO DE $\partial D(a,r)$ Y ASÍ EXISTE UN SUBRECUBRIMIENTO FINITO.

$\exists\, f: D(a,R) \subseteq \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ HOLOMORFA EN $D(a,R)$ CON $f = u + vi$; ASÍ ORIENTANDO $\partial D(a,r)$ POSITIVAMENTE LA FÓRMULA DE CAUCHY NOS DICE QUE

$$f(a) = u(a) + v(a)i = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{[u(a+re^{it}) + i\,v(a+re^{it})]\,rie^{it}}{a+re^{it}-a}\,dt.$$

DESPEJANDO $\quad u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+re^{it})\,dt.$

PRINCIPIO DEL MÓDULO MÁXIMO PARA FUNCIONES ARMÓNICAS:

SI $u:\Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ES UNA FUNCION ARMÓNICA SOBRE UN ABIERTO CONEXO

Y SI EXISTE $a \in \Omega$ CON $u(a) = \max\{u(z) : z \in \Omega\}$

ENTONCES $u \equiv cte$.

DEM ~~POR SER Ω CONEXO, JUNTO CON LOS TEOREMAS DE IDENTIDAD EXISTE $f \in H(\Omega)$ CON $f = u + vi$~~

SI $\exists\, a \in U$ CON $u(a) = \max\{u(z) : z \in \Omega\}$.

ENTONCES $\forall\, s < r$ CON $D(a,r) \subseteq \Omega$.

SE TIENE QUE

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + se^{it})\,dt \quad (*)$$

SI $u(a+se^{it}) = u(a)$ $\forall\, t \in [0, 2\pi]$, $\forall\, s<r$ ENTONCES

$u \equiv u(a)$ EN $D(a,r)$ ~~Y POR LOS TEOREMAS DE IDENTIDAD $f|_{D(a,r)} \equiv cte \Rightarrow f|_{\Omega} \equiv cte$.~~

SI $u(a) - u(a+se^{it}) \geq 0$ Y NO NULA,

COMO ES UNA FUNCION CONTINUA EN t

$$0 < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a) - u(a+se^{it})\,dt = u(a) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+se^{it})\,dt$$

LO QUE CONTRADICE $(*)$

PRINCIPIO DEL MÓDULO MÍNIMO PARA FUNCIONES ARMÓNICAS:

SI $u : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ES ARMÓNICA SOBRE Ω ABIERTO CONEXO Y SI EXISTE $a \in \Omega$ CON $u(a) = \min\{u(z) : z \in \Omega\}$

ENTONCES $u \equiv cte$

DEM CONSIDERAR $-u$ Y APLICAR EL PRINCIPIO DEL MÓDULO MÁXIMO

> OBSÉRVESE LA DIFERENCIA CON EL CORRESPONDIENTE TEOREMA PARA FUNCIONES HOLOMORFAS