EL NUCLEO DE POISSON

SI $f\in H(\Omega)$ Y $\overline{D(0,R)}\subseteq\Omega$, ENTONCES LA FÓRMULA DE CAUCHY NOS DICE QUE:

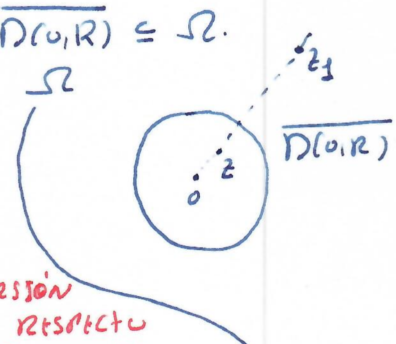
$$(*)\quad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,R)}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi \qquad \forall z\in D(0,R)$$

CONOCEMOS EL VALOR DE f EN TODO $D(0,R)$.
CON SÓLO SABER LO QUE OCURRE EN EL BORDE.

EN ESENCIA ES UNA SITUACIÓN ANÁLOGA A LA DEL PROBLEMA DE DIRICHLET DONDE QUEREMOS ENCONTRAR UNA FUNCIÓN ARMÓNICA CONOCIÉNDOLA EN EL BORDE DE UNA BOLA.

VAMOS A USAR $(*)$ PARA PODER ENCONTRAR UNA EXPRESIÓN INTEGRAL DE SU PARTE REAL.

SEA $f\in H(\Omega)$ Ω ABIERTO CON $\overline{D(0,R)}\subseteq\Omega$.



Y SEA $z=re^{i\theta}$ CON $r<R$.

SE DEFINE $z_1:=\dfrac{R^2}{r}e^{i\theta}=\dfrac{R^2}{\bar{z}}$ (INVERSIÓN DE z RESPECTO DE $\partial D(0,R)$)

ASÍ $|z_1|=\dfrac{R^2}{r}>R$.

Y POR EL TEOREMA DE CAUCHY

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,R)}\frac{f(\xi)}{\xi-z_1}\,d\xi=0 \qquad \left[\frac{f(\xi)}{\xi-z_1}\in H(D(0,R))\right)$$

POR TANTO USANDO LO ANTERIOR Y $(*)$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,R)}f(\xi)\left[\frac{1}{\xi-z}-\frac{1}{\xi-z_1}\right]d\xi=$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\, iRe^{it}\left[\frac{1}{Re^{it}-z} - \frac{1}{Re^{it}-z_1}\right]dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\left[\frac{Re^{it}}{Re^{it}-z} - \frac{Re^{it}}{Re^{it}-z_1}\right]dt =$$

SI $s = Re^{it}$, $s\cdot\bar{s} = R^2$ y $z_1 = \frac{R^2}{\bar{z}} = \frac{s\cdot\bar{s}}{\bar{z}}$

ASI $\frac{s}{s-z} - \frac{s}{s-\frac{s\bar{s}}{\bar{z}}} = \frac{s}{s-z} - \frac{1}{1-\frac{\bar{s}}{\bar{z}}} =$

$$= \frac{s}{s-z} + \frac{\bar{z}}{\bar{s}-\bar{z}} = \frac{s\bar{s} - s\bar{z} + s\bar{z} - z\bar{z}}{|s-z|^2} = \frac{R^2-r^2}{|s-z|^2}$$

$$= \frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{it})}{|Re^{it}-z|^2}\,dt = f(re^{i\theta}). \quad (**)$$

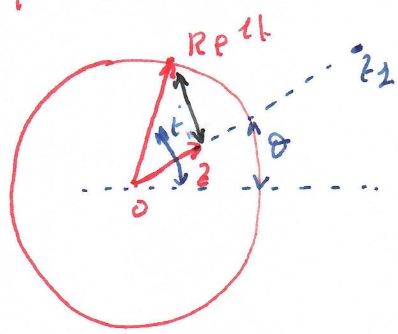
$\forall\, r\in(0,R)$ y $\forall\, \theta\in[0,2\pi]$.

PARA $z=0$ $\quad f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{it})\,dt$ (POR LA FORMULA DE CAUCHY).

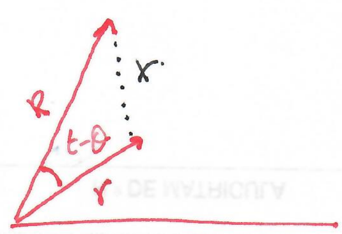
LUEGO $(**)$ ES CIERTA $\forall z\in D(0,r)$ $r<R$.

VAMOS A ESCRIBIR $|Re^{it}-z|^2$ DE OTRO MODO

$|Re^{it}-z|^2$ ES LA DISTANCIA AL CUADRADO DE z A LOS PUNTOS DE LA CIRCUNFERENCIA $\partial D(0,R)$.



POR LA LEY DEL COSENO



$$x^2 = |Re^{it}-re^{i\theta}|^2 = R^2 - 2Rr\cos(t-\theta) + r^2$$

$\Big[\; x^2 = (Re^{it}-re^{i\theta})(Re^{-it}-re^{-i\theta}) = R^2 - Rre^{i(\theta-t)} - Rre^{i(t-\theta)} + r^2 =$

$= R^2 - 2Rr\cos(t-\theta) + r^2 \;\Big]$.

Y ASÍ (**) $f(re^{i\theta}) = \dfrac{R^2-r^2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-t)}\, dt$

Y COMO $f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + i\, v(r,\theta)$.

$$\boxed{u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2-r^2)\, u(R,t)}{R^2+r^2-2Rr\cos(t-\theta)}\, dt}$$

$r < R$

$\theta \in [0, 2\pi]$

FÓRMULA INTEGRAL DE POISSON

ESTA FÓRMULA NOS DICE CÓMO ES LA PARTE REAL DE UNA FUNCIÓN HOLOMORFA EN EL DISCO CONOCIENDO SUS VALORES EN LA FRONTERA DEL DISCO

<u>DEF</u> FIJANDO $R>0$ SE DEFINE EL NÚCLEO DE POISSON

$$P(r, t-\theta) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(t-\theta)}$$

$r \in [0, R)$ y $t, \theta \in [0, 2\pi]$.

PROPIEDADES DEL NÚCLEO DE POISSON:

1º) $P(r, t-\theta) = \dfrac{R^2-r^2}{|Re^{it}-re^{i\theta}|^2} > 0$ HOJA PROBLEMAS

2º) FIJADO R, r y θ $P(r, t-\theta)$ ES CONTINUA EN $t \in [0, 2\pi]$, ADEMÁS

$$\lim_{r\to R} P(r, t-\theta) = \lim_{r\to R} \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(t-\theta)} = 0$$

UNIFORMEMENTE EN $t \in [0, 2\pi] \setminus (\theta-\delta', \theta+\delta')$, $\delta'>0$.

3º) $P(r, t-\theta) = \dfrac{R^2-r^2}{|Re^{it}-re^{i\theta}|^2} = \dfrac{Re^{it}}{Re^{it}-re^{i\theta}} + \dfrac{re^{-i\theta}}{Re^{-it}-re^{-i\theta}} =$

$$= \frac{s}{s-z} + \frac{\bar{z}}{\bar{s}-\bar{z}} = Re\left(\frac{s+z}{s-z}\right)$$

$s = Re^{it}$
$z = re^{i\theta}$

COMO $\dfrac{s+z}{s-z} \in \mathcal{H}(D(0,R))$, $P(r, t-\theta)$ ES ARMÓNICA EN $z = re^{i\theta}$.

4º) $P(r, \theta-t)$ ES 2π-PERIÓDICA EN $t-\theta$.

5º) $P(0, t-\theta) = 1$.

6º) SI $f \equiv 1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ Y ASÍ

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta-t)\, dt \quad \forall r \in [0, R) \text{ y } \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

FÓRMULA INTEGRAL DE POISSON

LA INTEGRAL DE POISSON:

VAMOS A DAR LA VUELTA AL ARGUMENTO ANTERIOR:

SEA $f \in C(\overline{D(0,R)}) = \{ g : \overline{D(0,R)} \to \mathbb{R} \text{ CONTINUA} \}$.

AHORA $\forall r \in (0,R)$ Y $\forall t \in [0,2\pi]$ SE DEFINE

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,t-\theta) \cdot f(Re^{it})\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(t-\theta)} f(Re^{it})\, dt$$

PUESTO QUE P Y f SON FUNCIONES CONTINUA EN t $u(r,\theta)$ ESTA BIEN DEFINIDA EN $D(0,R)$.

DEF u SE LLAMA INTEGRAL DE POISSON DE LA FUNCIÓN f.

SI $f \in H(\Omega)$ CON $\overline{D(0,R)} \subseteq \Omega$, ENTONCES $u = \operatorname{Re} f$ Y ES ARMÓNICA; PERO TAMBIEN

TEOREMA SEA $f(Re^{it})$ CONTINUA EN $t \in [0,2\pi]$

Y SEA $u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f(Re^{it})}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(t-\theta)}\, dt$

u ES ARMÓNICA EN $D(0,R)$ Y $u \in C(\overline{D(0,R)})$.

(I.E. $\lim_{\substack{r \to R \\ \theta \to \theta_0}} u(r,\theta) = u(R,\theta_0) = f(Re^{i\theta_0})$.)

COROLARIO EN LAS CONDICIONES ANTERIORES u ES LA ÚNICA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE DIRICHLET $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial D(0,R)} = f(\theta) \end{cases}$, f CONTINUA $\theta \in [0,2\pi]$

DEM EN EL TEOREMA SE VE QUE u ES LA PARTE REAL DE UNA FUNCION HOLOMORFA EN $D(0,R)$. LUEGO TIENE QUE SER ÚNICA. TAMBIÉN SE PUEDE ARGUMENTAR CON EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO.

LA ECUACIÓN DE LAPLACE EN POLARES

HOJA PROBLEMAS

LEMA SI $x = r\cos\theta$
$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$$\Delta u(x,y) = 0 \iff r^2 \overset{g_{rr}}{u_{rr}}(r,\theta) + r\overset{g_r}{u_r}(r,\theta) + \overset{g_{\theta\theta}}{u_{\theta\theta}}(r,\theta) = 0$$

$g(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$

DEM SEA $u(x,y)$ Y SEA

$$g(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\cos x\,\mathrm{sen}\,x + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{sen}^2 x =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2 x + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{sen}^2 x + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial^2\theta} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-r\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} r\cos\theta\right](-r\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{\partial u}{\partial x}(-r\cos\theta)$$

$$+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(-r\,\mathrm{sen}\,\theta) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r\cos\theta\right] r\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}(-r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2\mathrm{sen}^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial x}(-r\cos\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(-r\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

AHORA.

$$[1] = r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta) =$$

$$= r^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2 x + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{sen}^2 x + \cancel{2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}^{\,1}\right] +$$

$$+ r\left[\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta}^{\,2} + \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{sen}\,\theta}\right]$$

$$+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2\mathrm{sen}^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2\cos^2\theta - \cancel{2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}^{\,1}\right.$$

$$\left. + \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}(-r\cos\theta)}^{\,2} + \cancel{\frac{\partial u}{\partial y}(-r\,\mathrm{sen}\,\theta)}\right] =$$

$$= r^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] = [2].$$

ASÍ SI $[1] = 0 \implies [2] = 0$

SI $[2] = 0 \implies [1] = 0$ CQD

DEM. (DEL TEOREMA).

[1] u ES ARMONICA EN $D(0,R)$.

[2] u ES CONTINUA EN $\overline{D(0,R)}$.

VEAMOS EN ESTE ORDEN LA PRUEBA.

[1] $P(r,t-\theta) = Re\left(\frac{s+z}{s-z}\right)$ $z = re^{i\theta}$, $s = Re^{it}$

$$\frac{s+z}{s-z} = \frac{(s+z)(\overline{s-z})}{|s-z|^2} = \frac{|s|^2-|z|^2}{|s-z|^2} + \frac{z\bar{s}-s\bar{z}}{|s-z|^2}$$

ASI $P(r,t-\theta) = \frac{|s|^2-|z|^2}{|s-z|^2}$; $\frac{z\bar{s}-s\bar{z}}{|s-z|^2} = i\,Im\left(\frac{s+z}{s-z}\right)$.

$\overline{z\bar{s}} = s\bar{z}$

ASI $Re(z\bar{s}-s\bar{z}) = 0$

LUEGO P ES ARMÓNICA EN $z = re^{i\theta} \in D(0,R)$.

Y POR TANTO SATISFACE LA ECUACION DE LAPLACE

$$r^2 P_{rr} + rP_r + P_{\theta\theta} = 0 \qquad r\in[0,R) \text{ y } \theta\in[0,2\pi].$$

COMO $P(r,t-\theta)f(t)$ ES UNIFORMEMENTE CONTINUA EN $t\in[0,2\pi]$

ASI COMO LAS DERIVADAS PARCIALES DE P EN r Y θ MULTIPLICADAS POR f

SE TIENE QUE

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial P}{\partial r}(r,t-\theta) f(t)\,dt$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial P(r,\theta-t)}{\partial \theta} f(t)\,dt$$

... etc

ASI $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[r^2 P_{rr} + rP_r + P_{\theta\theta}\right] f(t)\,dt = 0$

POR TANTO u SATISFACE LA ECUACION DE LAPLACE EN POLARES Y POR TANTO ES ARMÓNICA.

[2] VEAMOS QUE $\lim_{\substack{r \to R \\ \theta \to \theta_0}} u(r,\theta) = f(\theta_0)$ [TEOREMA DE SCHWARZ]

$\forall \varepsilon > 0$ TENEMOS QUE ENCONTRAR $\rho \in (0,R)$

Y UN $\delta' > 0$ TAL QUE

$$\forall r \in (\rho, R) \quad \text{Y} \quad \forall \theta \in (\theta_0 - \delta', \theta_0 + \delta').$$

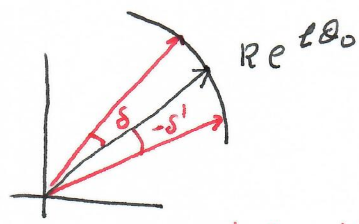
$$|u(r,\theta) - f(\theta_0)| < \varepsilon.$$

POR SER f CONTINUA EN θ_0

PARA EL $\varepsilon > 0$ ANTERIOR

$\exists\, \delta'$ TAL QUE

$$|f(\theta) - f(\theta_0)| < \varepsilon/3 \quad \text{SI} \quad \theta \in (\theta_0 - \delta', \theta_0 + \delta').$$



SEA $M = \max\{ f(\theta) : \theta \in [0,2\pi] \}$.

AHORA $\lim_{r \to R} P(r, t-\theta) = \lim_{r \to R} \dfrac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(t-\theta)} = 0$

UNIFORMEMENTE EN $t \in [0,2\pi] - \left(\theta - \frac{\delta'}{2}, \theta + \frac{\delta'}{2}\right)$.

ASI $\exists\, \rho \in (0,R)$ TAL QUE

$$P(r, t-\theta) < \frac{\varepsilon}{3M} \quad \forall r \in (\rho, R)$$

$$\text{Y} \ \forall\, |t-\theta| \geq \delta'/2$$

AHORA, SI $r \in (\rho, R)$ Y $\theta \in (\theta_0 - \delta'/2, \theta_0 + \delta'/2)$.

$$|u(r,\theta) - f(\theta_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t) f(t) - P(r,\theta-t) f(\theta_0)\, dt \right|$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\, dt = 1$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\, |f(t) - f(\theta_0)|\, dt$$

$P(r,\theta-t) > 0$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{t \in (\theta_0 - \delta', \theta_0 + \delta')} P(r, \theta - t)\, |f(t) - f(\theta_0)|\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{t \in [0, 2\pi] \setminus (\theta_0 - \delta', \theta_0 + \delta')} P(r, \theta - t)\, |f(t) - f(\theta_0)|\, dt \leq$$

SI $\theta_0 = 0$ Ó 2π
MODIFICAR CONVENIENTEMENTE

$$\leq \frac{1}{2\pi} \varepsilon/3 \int_{t \in (\theta_0 - \delta', \theta_0 + \delta')} P(r, \theta - t)\, dt + \frac{1}{2\pi}\, 2\pi\, \frac{\varepsilon}{3M} \cdot 2M \leq$$

$\theta \in (\theta_0 - \frac{\delta'}{2}, \theta_0 + \frac{\delta'}{2})$
$t \in [0, 2\pi] \setminus (\theta_0 - \delta', \theta_0 + \delta')$ $\Big\} \Rightarrow |t - \theta| \geq \delta'/2$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \varepsilon/3 + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

YA QUE $\int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\, dt = 1$.

LO QUE PRUEBA LA CONTINUIDAD DE $U(r, \theta)$.
EN $R e^{i\theta_0}$.

— · —

NOTA ES PROBLEMA DE CONTORNO

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g \end{array} \right.$$

CON $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Y g CONTINUA SOBRE EL BORDE DE Ω..

SE PUEDE PLANTEAR PARA OTROS ABIERTOS DISTINTOS DEL DISCO $D(0, R)$

A) $\Omega = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.
EXISTE UNA FORMULA INTEGRAL (DE SCHWARZ) PARA Ω DE LAS FUNCIONES $f \in H(\overline{\Omega})$.. LO QUE PERMITE ENCONTRAR LA SOLUCION DE $(*)$.

B) ¿ QUE DOMINIOS $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ SON TALES QUE $\exists f \in H(\Omega)$ CON $f(\Omega) = D(0,1)$ Y $f|_{\partial\Omega} = \partial D(0,1)$ CONTINUA?

EN ESTE CASO SI u ES SOLUCION DE $\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial D(0,1)} = g \circ f^{-1}|_{\partial D(0,1)} \end{array} \right.$

ENTONCES $u \circ f$ ES ARMONICA EN Ω

Y SI $z \in \partial\Omega$ $\quad u \circ f(z) = u \circ f(f^{-1}(w)) = u(w) = g \circ f^{-1}(w) = g(z)$. ($w \in \partial D(0,1)$)

LUEGO $u \circ f$ ES SOLUCION DE $(*)$ (TEOREMA DE LA APLICACION DE RIEMANN).