MÁS PROPIEDADES SOBRE FUNCIONES ARMÓNICAS.

Def Se dice que una función $u: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ continua sobre una región Ω, abierto y convexo, tiene la propiedad del valor medio si

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it})\, dt$$

para $a \in \Omega$ y con $\overline{D(a,r)} \subseteq \Omega$.

Observación:

1º) Vimos que toda función u armónica tenía la propiedad del valor medio

2º) Toda función con la propiedad del valor medio satisface el principio del máximo (i.e. no existe $z_0 \in \Omega$ con $|u(z_0)| \geq u(z)$ $\forall z \in \Omega$ salvo $u \equiv cte$)

En la demostración del principio del máximo se usaba sólo que las funciones armónicas verificaban la propiedad del valor medio. Es más esta propiedad las caracteriza

Teorema: Una función $u: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ continua, sobre la región Ω, que satisface la propiedad del valor medio es necesariamente armónica.

DEM u SATISFACE LA PROPIEDAD DEL VALOR MEDIO POR TANTO EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO.

SE $z_0 \in \Omega$ Y SEAN $R>0$ Y $\varepsilon>0$ CON $\overline{D(z_0, R)} \subseteq \Omega$ Y $D(z_0, R+\varepsilon) \subseteq \Omega$.

SEA $g\ \partial D(0,R) \longrightarrow \mathbb{R}$
$\theta \longrightarrow g(\theta) = u(z_0 + Re^{i\theta})$.
$Re^{i\theta}$

g ES CONTINUA EN $[0,2\pi]$ O EN $\partial D(0,R)$

ASÍ $$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t-\theta)\, g(t)\, dt$$

INTEGRAL DE POISSON DE g

v ES ARMÓNICA EN $D(0,R)$ Y CONTINUA EN $\overline{D(0,R)}$ CON $v(Re^{i\theta}) = g(\theta)$.

SEA $f\ D(z_0,R) \longrightarrow D(0,R)$
$z \longrightarrow f(z) = z - z_0$, $f \in H(\mathbb{C})$

Y ASÍ $\bar{v}(z) = v \circ f$ ES ARMÓNICA EN $D(z_0,R)$ Y $\forall z \in \partial D(z_0,R)$

$$\bar{v}(z) = v(z-z_0) \underset{|z-z_0|=R}{=} g(z-z_0) = u(z).$$

LUEGO $\bar{v}$ Y u COINCIDEN SOBRE $\partial D(z_0,R)$ Y COMO AMBAS SATISFACEN EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO Y POR TANTO $\bar{v} - u$.
$|\bar{v} - u| = 0 \quad \forall \partial D(z_0,R)$ Y ASÍ
$\bar{v} - u \equiv 0$ EN $D(z_0,R)$ LUEGO
$\bar{v} = u$ Y ASÍ u ES HARMÓNICA EN $D(z_0,R)$

TEOREMA DE HARNACK: SEA $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ UNA SUCESIÓN DE FUNCIONES ARMÓNICAS SOBRE UNA REGIÓN Ω.

a) SI $u_n \longrightarrow u$ UNIFORME SOBRE LOS SUBCONJUNTOS COMPACTOS DE Ω, ENTONCES u ES ARMÓNICA EN Ω.

b) SI $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \dots$ ENTONCES O BIEN $u_n(z) \longrightarrow \infty \ \forall z \in \Omega$ O BIEN $u_n \longrightarrow u$ UNIFORMEMENTE SOBRE LOS COMPACTOS DE Ω CON u ARMÓNICA EN Ω.

DEM a) SEA $z_0 \in \Omega$ Y SEA $R>0$ CON $\overline{D(z_0,R)} \subseteq \Omega$.

SEA $v_n(z) = u_n(z+z_0) \longrightarrow v(z) = u(z+z_0)$ UNIFORMEMENTE SOBRE LOS COMPACTOS DE $\Omega' = \{z-z_0 : z \in \Omega\}$ EN PARTICULAR SOBRE $\partial D(0,R)$.

AHORA POR LA FÓRMULA INTEGRAL DE POISSON

$$v_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,t-\theta)\, v_n(Re^{it})\,dt$$

FIJADO $r<R$

$$|P(r,t-\theta)\, v_n(Re^{it}) - P(r,t-\theta)\, v(Re^{it})| \leq$$

$$\leq |P(r,t-\theta)|\, |v_n(Re^{it}) - v(Re^{it})| \leq$$

$$\leq \frac{R+r}{R-r} |v_n(Re^{it}) - v(Re^{it})| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

VER LEMA SIGUIENTE

UNIFORMEMENTE EN $t \in [0,2\pi]$

ASÍ $v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,t-\theta)\, v(Re^{it})\,dt$

COMO v ES EL LÍMITE UNIFORME DE FUNCIONES CONTINUAS ES CONTINUA Y POR LAS PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE POISSON v ES ARMÓNICA EN $D(0,R)$ Y CONTINUA EN $\overline{D(0,R)}$. ASÍ $u(z) = v(z-z_0)$ ES ARMÓNICA EN $D(z_0,R)$. c.q.d.

b) PARA VER ESTE APARTADO NECESITAMOS.

LEMA (DESIGUALDADES DE HARNACK).

a) FIJADO $R>0$ Y $r\in(0,R)$ SE VERIFICA QUE:

$$\frac{R-r}{R+r} \leq P(r,t-\theta) \leq \frac{R+r}{R-r}.$$

b) SI u ES UNA FUNCION ARMONICA POSITIVA SOBRE Ω Y $\overline{D(z_0,R)} \subseteq \Omega$, ENTONCES $\forall r\in(0,R)$

$$\frac{R-r}{R+r}u(z_0) \leq u(z) \leq \frac{R+r}{R-r}u(z_0)$$

$\forall z\in \overline{D(z_0,r)}$.

DEM a) EL NUCLEO DE POISSON $P(r,t-\theta) = \dfrac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(t-\theta)}$

PARA $R>0$ FIJADO Y $r\in[0,R)$ Y $t,\theta\in[0,2\pi]$.

ASI
$$\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(t-\theta)} \leq \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr} = \frac{(R-r)(R+r)}{(R-r)^2} = \frac{R+r}{R-r}.$$

$$\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(t-\theta)} \geq \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2+2Rr} = \frac{(R-r)(R+r)}{(R+r)^2} = \frac{R-r}{R+r}.$$

b) SI u ES ARMÓNICA, LA INTEGRAL DE POISSON NOS DICE QUE:

$$u(z) = u(z_0+re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,t-\theta)\, u(z_0+Re^{it})\,dt$$

$\forall z\in \overline{D(z_0,r)}$ $\quad r<R$

ASI POR a) Y POR SER $u\geq 0$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{R-r}{R+r}\int_0^{2\pi} u(z_0+Re^{it})\,dt \leq u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\frac{R+r}{R-r}\int_0^{2\pi} u(z_0+Re^{it})\,dt$$

Y POR LA PROPIEDAD DEL VALOR MEDIO

$$\frac{R-r}{R+r}u(z_0) \leq u(z) \leq \frac{R+r}{R-r}u(z_0) \quad \forall z\in\overline{D(z_0,r)},\ r<R.$$

DEM b) PODEMOS SUPONER $u_1 \geq 0$, EN OTRO CASO SE RAZONA USANDO $v_n = u_n - u_1$. $n \geq 2$.

SEA $u(z) = \sup_n u_n(z)$, $z \in \Omega$ Y SEAN

$A = \{z \in \Omega : u(z) < \infty\}$ Y $B = \{z \in \Omega : u(z) = \infty\}$.

SEAN $z_0 \in \Omega$ Y $R > 0$ CON $\overline{D(z_0, R)} \subset \Omega$.

COMO $$\frac{R-r}{R+r} u_n(z_0) \leq u_n(z_0 + re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r} u_n(z_0)$$

POR LA CONVERGENCIA MONÓTONA DE $u_n(z)$ a $u(z)$ SE SIGUE QUE

$$\frac{R-r}{R+r} u(z_0) \leq u(z_0 + re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r} u(z_0).$$

ASI SI $u(z_0) = \infty \Rightarrow u(z) = \infty \quad \forall z \in D(z_0, R)$.

Y SI $u(z_0) < \infty \Rightarrow u(z) < \infty \quad \forall z \in D(z_0, R)$.

POR TANTO, A Y B SON CONJUNTOS ABIERTOS Y DISJUNTOS QUE RECUBREN Ω, CONEXO, ASI

O BIEN $A = \emptyset$ Y NO HAY NADA QUE PROBAR,

O BIEN $B = \emptyset$, EN ESTE CASO SI $m, n \in \mathbb{N}$.

$u_{m+n} - u_n \geq 0$ Y ARMÓNICA EN Ω.

ASI POR EL LEMA, PARA $\overline{D(z_0, R)} \subseteq \Omega$,

$$0 \leq u_{m+n}(z) - u_n(z) \leq \frac{R+r}{R-r}\left(u_{m+n}(z_0) - u_n(z_0)\right) \leq$$

SI $r = R/2$ $\qquad \leq 3\left(u_{m+n}(z_0) - u_n(z_0)\right)$.

$\forall z \in \overline{D(z_0, R/2)}$. TOMANDO LIMITES EN m.

$$u(z) - u_n(z) \leq 3\left(u(z_0) - u_n(z_0)\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

ASI $u_n \longrightarrow u$ UNIFORMEMENTE EN $\overline{D(z_0, R/2)}$.

COMO ESTO ES CIERTO $\forall z_0 \in \Omega$, CONCLUIMOS QUE u ES CONTINUA EN Ω.

ADEMAS COMO $u_n \uparrow u$ SOBRE $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Y COMO u ES CONTINUA EN Ω, EL TEOREMA DE DINI NOS DICE QUE $u_n \longrightarrow u$ UNIFORMEMENTE SOBRE LOS COMPACTOS DE Ω. AHORA USANDO LA PARTE a) SE CONCLUYE QUE u ES ARMÓNICA EN Ω c.q.d

TEOREMA DE DINI SEAN $u_n: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$. CONTINUAS $n \in \mathbb{N}$ Y CON $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \dots$ Y TAL QUE EXISTE EL LIMITE PUNTUAL u. SIENDO ESTE CONTINUO EN Ω. ENTONCES

$$u_n \longrightarrow u$$

UNIFORMEMENTE SOBRE LOS COMPACTOS DE Ω.

DEM SUPONGAMOS QUE $\exists K \subseteq \Omega$ COMPACTO Y $\exists \varepsilon > 0$ DE MODO QUE $\exists (x_n) \subseteq K$ CON $\varepsilon < u(x_n) - u_n(x_n)$. $\forall n \in \mathbb{N}$. (ES DECIR NO HAY CONVERGENCIA UNIFORME SOBRE K). POR SER K COMPACTO $\exists x_{n_k} \longrightarrow x \in K$.

PARA EL ESO ANTERIOR.

$$\exists n_{k_0} : \quad k \geq k_0 \quad |u(x) - u(x_{n_k})| < \varepsilon/4.$$

$$\exists N_0 : \quad n \geq N_0 \quad u(x) - u_n(x) < \varepsilon/4.$$

$$\exists n_{k_1} : \quad k \geq k_1 \quad |u_{N_0}(x) - u_{N_0}(x_{n_k})| < \varepsilon/4.$$

ASI $$\varepsilon < u(x_{n_k}) - u_{n_k}(x_{n_k}) \underset{\substack{\downarrow \\ u_{n_k} \geq u_{N_0}}}{\leq} u(x_{n_k}) - u_{N_0}(x_{n_k}) =$$

$$= u(x_{n_k}) - u(x) + u(x) - u_{N_0}(x) + u_{N_0}(x) - u_{N_0}(x_{n_k})$$

ASI $$\varepsilon < |u(x_{n_k}) - u_{N_0}(x_{n_k})| \leq |u(x_{n_k}) - u(x)| + |u(x) - u_{N_0}(x)| + |u_{N_0}(x) - u_{N_0}(x_{n_k})| \underset{\substack{\downarrow \\ k \geq \max\{k_0, k_1\}}}{<}$$

$$< \frac{3\varepsilon}{4}$$ CONTRADICCION !!