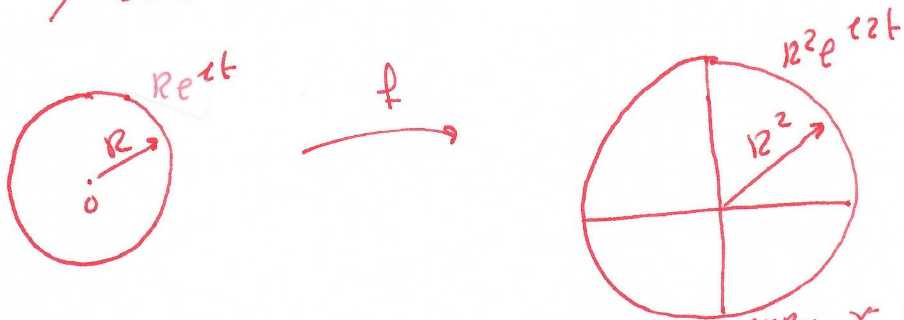
GEOMÉTRÍA DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS

SEA $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. VAMOS A PENSAR f COMO UNA TRANSFORMACIÓN DEL PLANO.

EJEMPLOS

·) SEA $f(z) = z^2$ Y SEA $\gamma(t) = Re^{it}$.



LA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO CERO Y RADIO R SE TRANFORMA EN LA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO 0 Y RADIO R^2 PERO RECORRIDA **DOS** VECES.

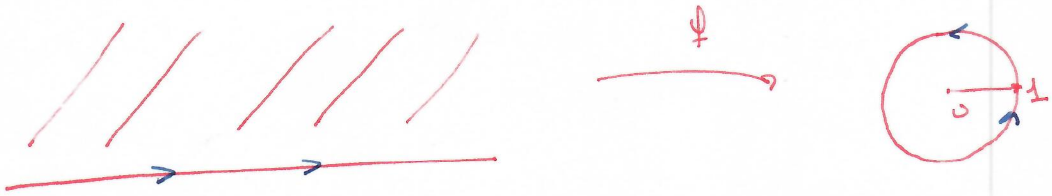
ASÍ $\frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{1}{z}\,dz = 2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$.

··) $f(z) = \frac{i - z}{i + z}$ (TRANSFORMACIÓN DE CAYLEY)

CASO PARTICULAR DE TRANSFORMACIÓN DE MÖBIUS

$f \in H(\mathbb{C} \setminus \{-i\})$. Y $f: \Omega = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \to D(0,1)$

ES BIYECTIVA Y ADEMÁS $f(\partial\Omega) = \partial D(0,1)$



OBSERVACIÓN:
ESTA TRANSFORMACIÓN PERMITE RESOLVER EL PROBLEMA

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\mathbb{R}} = g(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

PASANDO POR f AL PROBLEMA DE DIRICHLET EN EL DISCO (¿SE GENERA SIEMPRE UN PUNTO DE DISCONTINUIDAD EN LA CIRCUNFERENCIA ¿Y LUEGO SE PROCEDE IGUAL?)

DEM $\quad f(z) = \dfrac{i-z}{i+z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-i\})$; POR TANTO CONTINUA.

SI $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$

$$\frac{i-z}{i+z} = a \iff i - z = ai + az \iff i(1-a) = (1+a)z$$

ASI $\quad z = \dfrac{i(1-a)}{1+a}.$

LUEGO f ES INYECTIVA Y SUPRAYECTIVA DE $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ EN $\mathbb{C} - \{-1\}$

OBSERVAR QUE $\quad \lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{i-z}{i+z} = -1.$

ADEMAS PARA $z \quad \mathrm{Im}\, z \geq 0$

$$\left| \frac{i-z}{i+z} \right|^2 = \frac{(i-z)\overline{(i-z)}}{(i+z)\overline{(i+z)}} = \frac{1+|z|^2 - \bar{i}z - i\bar{z}}{1+|z|^2 + \bar{i}z + i\bar{z}} =$$

$$= \frac{1+|z|^2 - 2\,\mathrm{Im}\, z}{1+|z|^2 + 2\,\mathrm{Im}\, z} \leq 1$$

SI $\mathrm{Im}\, z > 0$

Y SE TIENE LA IGUALDAD SI $\mathrm{Im}\, z = 0$.

POR TANTO COMO $\Omega = \{z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ ES CONEXO

Y $f(i) = 0 \implies f(\Omega) = D(0,1)$ c.q.d

FUNCIONES CONFORMES

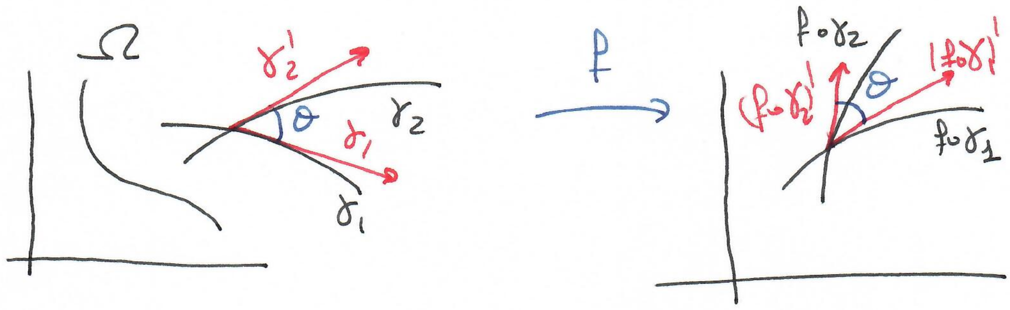
DEF: SEA $f:\Omega\subseteq\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$. SE DICE QUE f ES CONFORME EN Ω. SI f ES DIFERENCIABLE CON $Df(z)\neq 0$ (*) $\forall z\in\Omega$. Y TAL QUE PARA TODO PAR DE CURVAS PARAMÉTRICAS DERIVABLES

$$\gamma_1,\ \gamma_2\ [a,b]\longrightarrow\Omega.$$

CON $\gamma_1(t_1)=\gamma_2(t_2)$ Y CON $\alpha=\measuredangle\,\gamma_1'(t_1)\,\gamma_2'(t_2)$

ENTONCES

$$\alpha=\measuredangle\,(f\circ\gamma_1)'(t_1)\cdot(f\circ\gamma_2)'(t_2)$$



OBSERVACION: RIEMANN BUSCABA TRANSFORMACIONES DEL PLANO EN SI MISMO QUE NO MODIFICASEN ÁNGULOS DE CURVAS QUE SE CORTAN. (ESTO SE DEBIA A CONSIDERACIONES FÍSICAS DE TRANSFORMAR UN PROBLEMA EN Ω EN OTRO EN $f(\Omega)$, QUIZAS MAS SENCILLO (PENSAR EN EL PROBLEMA DE DIRICHLET), SIN MODIFICAR LA "GEOMETRIA INTERNA" DEL PROBLEMA.

¿COMO SON LAS FUNCIONES CONFORMES?

VEAMOS QUE ESENCIALMENTE SON LAS FUNCIONES HOLOMORFAS.

$$\underset{f=u+vi}{Df(z)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\underset{\text{SI } f \text{ ES HOLOMORFA}}{=}\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x}\end{pmatrix}.$$

USANDO LAS IGUALDADES DE CAUCHY-RIEMANN

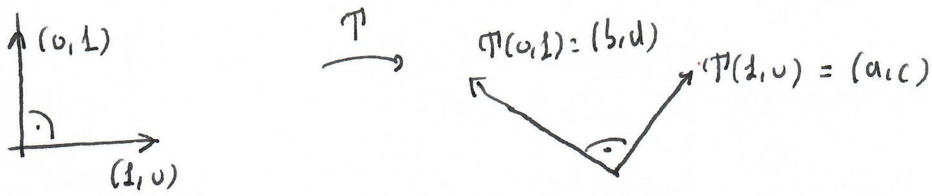
LEMA Sea $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ aplicación lineal que conserva ángulos. (e.d. $\measuredangle Tx, Ty = \measuredangle x, y$ incluyendo orientación). Entonces existe $\lambda \in (0, \infty)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$M_T = \lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(Es decir T es un giro junto una homotecia)

DEM

Sea $M_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

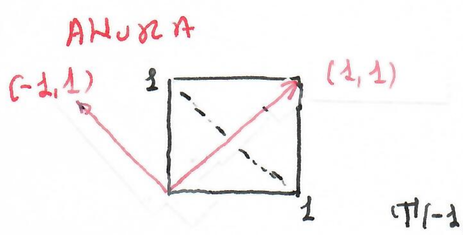


Como $(1,0)$ y $(0,1)$ son ortogonales también lo son $T(1,0)$ y $T(0,1)$

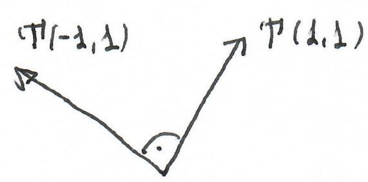
Así $(b,d) = \lambda(-c, a)$ $\lambda > 0$ (para guardar la orientación)

$$M_T = \begin{pmatrix} a & -\lambda c \\ c & \lambda a \end{pmatrix}$$

Ahora



las diagonales del cuadrado son ortogonales así



$$0 = \langle T(1,1), T(-1,1) \rangle = \langle (a - \lambda c, c + \lambda a), (-a - \lambda c, -c + \lambda a) \rangle$$

$$= -[(a - \lambda c)(a + \lambda c)] + [(\lambda a + c) \cdot (\lambda a - c)] =$$

$$= -[a^2 - \lambda^2 c^2] + \lambda^2 a^2 - c^2 = -[a^2 + c^2] + \lambda^2 [a^2 + c^2].$$

Luego $\lambda = 1$.

LUEGO $M\varphi = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+c^2}\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} & \frac{-c}{\sqrt{a^2+c^2}} \\ \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}} \end{pmatrix}$

EXISTE $\theta \in [0, 2\pi)$ TAL QUE $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}$

(YA QUE $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2 + \left(\frac{-c}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2 = 1$). CON

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

LUEGO $M\varphi = \sqrt{a^2+c^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. (*)

OBSERVACIÓN

- SI $z \in \mathbb{C}$ $M\varphi z = e^{\log(\sqrt{a^2+b^2}) + i\theta} \cdot z$.

- SI $M\varphi = \lambda\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ $\lambda > 0$, CONSERVA ÁNGULO ENTONCES $(M\varphi)^{-1}$ TAMBIÉN CONSERVA ÁNGULO.

OBSERVACIÓN •) SI φ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ES LINEAL Y CONSERVA ÁNGULO, SU DIFERENCIAL $D\varphi = M\varphi$ QUE POR TANTO SATISFACE LAS ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

••) DE FORMA GENERAL SI F $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ DIFERENCIABLE Y CONSERVA ANGULOS E.D.

$$\measuredangle (F\circ\gamma_1)'(t_1)(F\circ\gamma_2)'(\gamma_2) = \measuredangle\, \gamma_1'(t_1)\cdot\gamma_2'(t)$$
$$\shortparallel$$
$$\measuredangle\, DF(z_0)\cdot\gamma_1'(t_1)\ DF(z_0)\cdot\gamma_2'(t_2) = \measuredangle\, \gamma_1'(t_2)\cdot\gamma_2'(t)$$

COMO $DF(z_0)$ ES LÍNEAL (LA DIFERENCIAL DE F EN z_0) TIENE QUE VERIFICAR (*). LUEGO SATISFACE LAS CONDICIONES DE CAUCHY-RIEMANN. ASÍ f ES DERIVABLE EN z_0

TEOREMA: SEA $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ABIERTO Y SEA

$$f \quad \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longrightarrow f(z) = u(z) + v(z)i =$$
$$= u(x,y) + v(x,y)i$$

SON EQUIVALENTES:

a) f ES DERIVABLE EN z_0 Y $f'(z_0) \neq 0$

b) f ES DIFERENCIABLE EN z_0 CON $Df(z_0) \neq 0$ Y SE SATISFACEN LAS CONDICIONES DE CAUCHY - RIEMANN

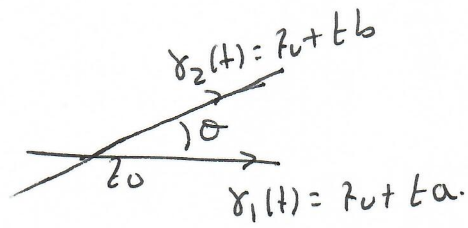
$$u_x = v_y$$
$$u_y = -v_x$$

c) f ES DIFERENCIABLE EN z_0, $Df(z_0) \neq 0$ Y $Df(z_0)$ CONSERVA ÁNGULOS Y DIRECCIONES

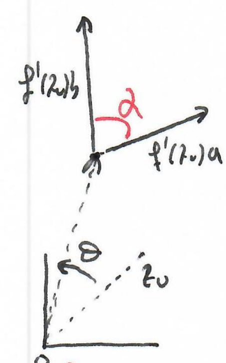
DEM

$a \Leftrightarrow b$ LO VIMOS EN SU MOMENTO

a) $\Rightarrow$ c)

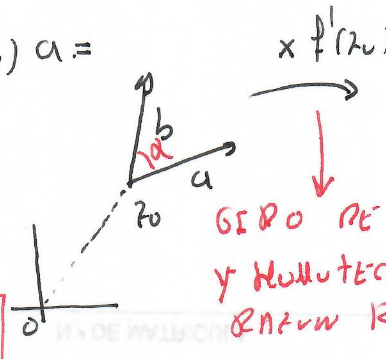


$a, b \in \mathbb{R}^2$



$$\measuredangle (f \circ \gamma_2)'(0)\,(f \circ \gamma_1')(0) =$$
$$= \measuredangle\, f'(z_0)b \cdot f'(z_0)a =$$

$f'(z_0) = Re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ ASÍ AL MULTIPLICAR GIRAMOS Y EXTENDEMOS



GIRO DE ÁNGULO θ Y HOMOTECIA DE RAZÓN R.

$$\boxed{= (\measuredangle\, Df(z_0)b \;\; Df(z_0)a) =}$$
$$= \measuredangle\, b\, a.$$

Y $Df(z_0)$ SATISFACE CAUCHY-RIEMANN POR EL LEMA ES UN GIRO JUNTO UNA HOMOTECIA

c) $\Rightarrow$ b)

$Df(z_0)$ ES UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL QUE SATISFACE CAUCHY-RIEMANN. POR EL LEMA ANTERIOR

EJEMPLO 0

SEA $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f BIYECTIVA, $f \in H(\mathbb{C})$ Y $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. ASÍ

$$f(z) = az + b \quad a, b \in \mathbb{C}$$

LEMA SI $f \in H(\mathbb{C})$ Y $f \not\equiv ct$, Y BIYECTIVA, ENTONCES

$$\lim_{z \to \infty} |f(z)| = \infty$$

[EJEMPLO $f(z) = \operatorname{sen} z \in H(\mathbb{C})$, $f \neq ct$ Y $\lim_{z\to\infty} |\operatorname{sen} z| \neq \infty$

SEA $n \in \mathbb{N}$ $|\operatorname{sen} n| \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Y $n \to \infty$.

DEM ... SEA $g(z) = f(\frac{1}{z})$ $g: \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} - \{f(0)\}$ $g \in H(\mathbb{C} - \{0\})$

Y g BIYECTIVA. ASÍ $\lim_{z\to 0} g(z) = k \Rightarrow f$ CONSTANTE (TEOREMA DE LIOUVILLE)

O BIEN $\lim_{z\to 0} |g(z)| = \infty \iff \lim_{z \to \infty} |f(z)| = \infty$

O BIEN NO EXISTE $\lim_{z\to 0} |g(z)|$. Y ASÍ g TENDRÍA EN $z = 0$ UNA DISCONTINUIDAD ESENCIAL (VEAMOS QUE ESTO NO ES POSIBLE)

SEA $z_0 \neq 0$ SEAN $g(z_0)$ Y $\varepsilon > 0$ CON $z_0 \notin D(0, \varepsilon)$, POR EL TEOREMA DE CASORATI - WEIERSTRASS $\exists (z_n) \subset D(0, \varepsilon) - \{0\}$ CON $g(z_n) \to g(z_0)$.

SEA ε' CON $D(z_0, \varepsilon') \cap D(0, \varepsilon) - \{0\} = \emptyset$, $\exists \delta > 0$ TAL QUE $\forall g(z_n) \in D(g(z_0), \delta)$ $\exists w_n \in D(z_0, \varepsilon)$ CON $g(w_n) = g(z_n)$ LO QUE CONTRADICE QUE g SEA INYECTIVA

LEMA SI $f \in H(\mathbb{C})$ SON EQUIVALENTES

a) $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$

b) f ES UN POLINOMIO NO CONSTANTE

D b) $\Rightarrow$ a) ES TRIVIAL

a) $\Rightarrow$ b) SEA $g(z) = f(1/z) \in H(\mathbb{C} - \{0\})$.

ASÍ $\lim_{z\to 0} |g(z)| = \infty$ LUEGO g TIENE UN POLO EN $z = 0$

$$\text{ASÍ } g(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

$$\text{COMO } f(z) = g(1/z) = \sum_{k=1}^{n} a_k z^k + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k}$$

COMO f ES DERIVABLE EN $z = 0$ $f(z) = b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$

LEMA SI $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ Y f ES INYECTIVA ENTONCES $f(z) = a_0 + a_1 z$.

DEM POR EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA, SI f ES INYECTIVA $f(z) = a_n z^n$ Y SABEMOS QUE CERCA DE CERO PODEMOS TOMAR w Y $z_1, z_2, \ldots z_n$ DISTINTAS CON $f(z_j) = w$. ASÍ $n = 1$ Y $f(z) = a_0 + a_1 z$.

LO ANTERIOR TERMINA CON LAS TRANSFORMACIONES "CONFORMES" DE $\mathbb{C}$ EN $\mathbb{C}$.

SEA $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$ SI $\exists\, g \;\; \Omega \longrightarrow D(0,1)$ $g \in H(\Omega)$ Y $g^{-1} \in H(D(0,1))$

CON $g : \overline{\Omega} \longrightarrow \overline{D(0,1)}$ CONTINUA CON

$g(\partial\Omega) = \partial D(0,1)$ (BIYECTIVA).

SEA $x \in \partial\Omega$ $\exists!\, z \in \partial D(0,1)$ CON $x = g^{-1}(z)$.

Ejemplo $\{z : \operatorname{Im} z > 0\} \longrightarrow D(0,1)$

$z \longrightarrow \dfrac{i - z}{i + z}$

TRANSFORMACION DE CAYLEY

SEA EL PROBLEMA

$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\partial D(0,1)} = f \circ g^{-1} \end{cases}$

EXISTE SOLUCION ÚNICA v

SEA AHORA $v \circ g$ (ARMÓNICA YA QUE v LO ES Y g HOLOMORFA)

ADEMAS $v \circ g|_{\partial\Omega} = v \circ g|_{\partial\Omega}(z) = v \circ \underset{\substack{\downarrow \\ z \in \partial\Omega}}{g(z)} = f \circ g^{-1} \circ g(z) = f(z)$

LUEGO $v \circ g$ ES LA SOLUCION BUSCADA