TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

DEF A UNA FUNCIÓN DEL TIPO

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad a,b,c,d \in \mathbb{C} \text{ con } \boxed{ad-cb \neq 0}$$

SE LE LLAMA TRANSFORMACIÓN RACIONAL LINEAL O TAMBIÉN TRANSFORMACIÓN DE MÖBIUS.

OBSERVACIÓN: SI $ad-cb=0$

i) SI $c=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 & f \equiv ct \\ \text{ó} \\ d=0 & f \text{ NO ESTÁ DEFINIDA} \end{cases}$

SI $c \neq 0$ Y $a \neq 0$ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

CON $(a,b) = \lambda(c,d)$

Y ASÍ $f(z) = \frac{\lambda cz + \lambda d}{cz+d} = \lambda$ $\quad f \equiv ct$

EJEMPLO LA TRANSFORMACIÓN DE CAYLEY

$$f(z) = \frac{-z+i}{z+i} \qquad -i-i = -2i \neq 0$$

ES UN EJEMPLO DE TRANSFORMACIÓN DE MÖBIUS.

PROPIEDADES SI $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-cb \neq 0$,

ENTONCES $f: \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ ES BIYECTIVA

CON $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ Y POR TANTO $f^{-1} \in H(\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\})$.

DEM SEA $w \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ $\quad w = \frac{az+b}{cz+d} \Leftrightarrow z = \frac{-b+dw}{a-cw}$

$\quad w \neq \frac{a}{c}$.

ADEMÁS $f'(z) = \frac{a(cz+d)-(az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$

ASÍ $\exists f^{-1} \in H(\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\})$.

$$f^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a} \quad \text{TRANSFORMACIÓN DE MÖBIUS.}$$