TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

DEF A UNA FUNCIÓN DEL TIPO

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ CON } \boxed{ad - cb \neq 0}$$

SE LE LLAMA TRANSFORMACIÓN RACIONAL LINEAL O TAMBIÉN TRANFORMACIÓN DE MÖBIUS.

OBSERVACIÓN: SI $ad - cb = 0$

i) SI $c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 & f \equiv ct \\ \text{ó} & \\ d = 0 & f \text{ NO ESTÁ DEFINIDA} \end{cases}$

SI $c \neq 0$ Y $a \neq 0$ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

CON $(a, b) = \lambda(c, d)$

Y ASÍ $f(z) = \frac{\lambda cz + \lambda d}{cz+d} = \lambda \qquad f \equiv ct$

EJEMPLO LA TRANSFORMACIÓN DE CAYLEY

$$f(z) = \frac{-z+i}{z+i} \qquad -i - i = -2i \neq 0$$

ES UN EJEMPLO DE TRANFORMACIÓN DE MÖBIUS.

PROPIEDADES SI $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - cb \neq 0$,

ENTONCES $f: \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ ES BIYECTIVA

CON $f'(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$ Y POR TANTO $f^{-1} \in H(\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\})$.

DEM SEA $w \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ $\quad w = \frac{az+b}{cz+d} \Leftrightarrow z = \frac{-b+dw}{a-cw}$

$\downarrow$ $w \neq \frac{a}{c}$.

ADEMÁS $f'(z) = \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$

ASÍ $\exists f^{-1} \in H(\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\})$.

$$f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a} \quad \text{TRANSFORMACIÓN DE MÖBIUS.}$$

PROPIEDAD SEA $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ CON $ad - cb \neq 0$

ENTONCES $f(z) = \begin{cases} f(z) & \text{SI } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty & \text{SI } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{SI } z = \infty \end{cases}$

$f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ES BIYECTIVA Y BICONTINUA.

DEM $\lim_{z \to \infty} \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c}$

y $\lim_{z \to -\frac{d}{c}} \dfrac{az+b}{cz+d} = \infty$ ASÍ TENIENDO EN CUENTA LA PROPOSICIÓN ANTERIOR Y COMO SE DEFINE LA TOPOLOGÍA EN $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (ESFERA DE RIEMANN) SE TIENE EL RESULTADO.

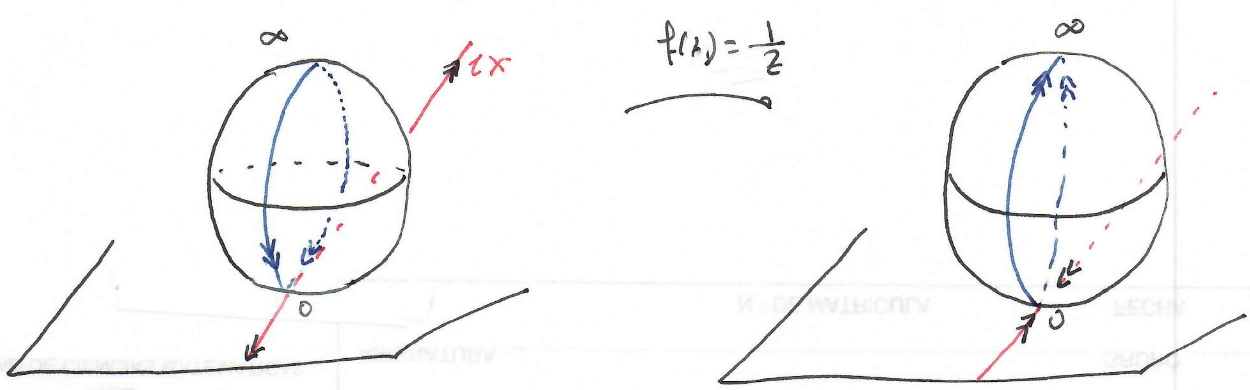
EJEMPLO $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

SE PUEDE VER COMO UNA TRANSFORMACIÓN DE $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ EN SÍ MISMO (BIYECTIVA CON $f'(z) = \frac{-1}{z^2} \neq 0$)

O COMO $f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

CON $f(0) = \infty$

Y $f(\infty) = 0$.



PROPIEDAD SEA $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ CON $ad-cb \neq 0$ UNA TRANSFORMACION DE MÖBIUS.

a) f^{-1} ES OTRA TRANSFORMACION DE MÖBIUS

b) SI $g(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ OTRA TRANS DE MÖBIUS ENTONCES $f\circ g$ ES DE NUEVO UNA TRANSFORMACION DE MÖBIUS.

DEM a) SI $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+b}$ VIMOS QUE

$$w = \frac{az+b}{cz+b} \iff z = \frac{dw-b}{-cw+a} \quad \text{CON } ad-bc \neq 0.$$

b) $$f\circ g(z) = \frac{a\left((\alpha z+\beta)/\gamma z+\delta\right) + b}{c\left((\alpha z+\beta)/\gamma z+\delta\right) + d} =$$

$$= \frac{(a\alpha + b\gamma)z + a\beta + b\delta}{(c\alpha + d\gamma)z + c\beta + d\delta}$$

Y $(a\alpha+b\gamma)(c\beta+d\delta) - (c\alpha+d\gamma)(a\beta+b\delta) =$

$$= \left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{vmatrix} \neq 0.$$

PROPIEDAD TODA TRANSFORMACION DE MÖBIUS TIENE A LO MÁS DOS PUNTOS FIJOS, SALVO SI $f(z)=z$.

DEM SEA $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$; SI $z = f(z)$

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \iff cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Y ESTA ECUACION TIENE A LO MAS DOS RAÍCES DISTINTAS.:

$$z = \frac{-(d-a) \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c}.$$

PROPIEDAD: toda transformación de Möbius queda determinada por sus valores en tres puntos (e.d. si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ y $w_1\ w_2\ w_2 \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ son ternas de puntos distintos, entonces existe una única transformación de Möbius f de modo que $f(z_i) = w_i$ $i = 1\,2\,3$), con la excepción $f(\infty) = \infty$

OBSERVACIÓN: si $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$

Como $a \neq 0$ (ó $c \neq 0$) $f(z) = \dfrac{z + b/a}{c/a\, z + d/a}$, luego f viene determinado por 3 parámetros.

DEM Sea pues el sistema

$$\frac{z_1 + c_1}{c_2 z_1 + c_3} = w_1 \Rightarrow c_1 - z_1 w_1 c_2 - w_1 c_3 = z_1$$

$$\frac{z_2 + c_1}{c_2 z_2 + c_3} = w_2 \Rightarrow c_1 - z_2 w_2 c_2 - w_2 c_3 = z_2$$

$$\frac{z_3 + c_1}{c_2 z_3 + c_3} = w_3 \Rightarrow c_1 - z_3 w_3 c_2 - w_3 c_3 = z_3$$

Este sistema me determina c_1, c_2 y c_3 de modo único ya que si f y g son transformaciones de Möbius con $f(z_i) = w_i$ y $g(z_i) = w_i$ $i = 1\,2\,3$. entonces $g^{-1}(w_i) = z_i$ con g^{-1} transformación de Möbius así como

$$f \circ g^{-1}(w_i) = w_i \quad i = 1, 2, 3$$

y esto no es posible ya que $f \circ g^{-1}$ sería una transformación de Möbius que fijaría 3 puntos distintos, salvo $g^{-1} = f^{-1}$

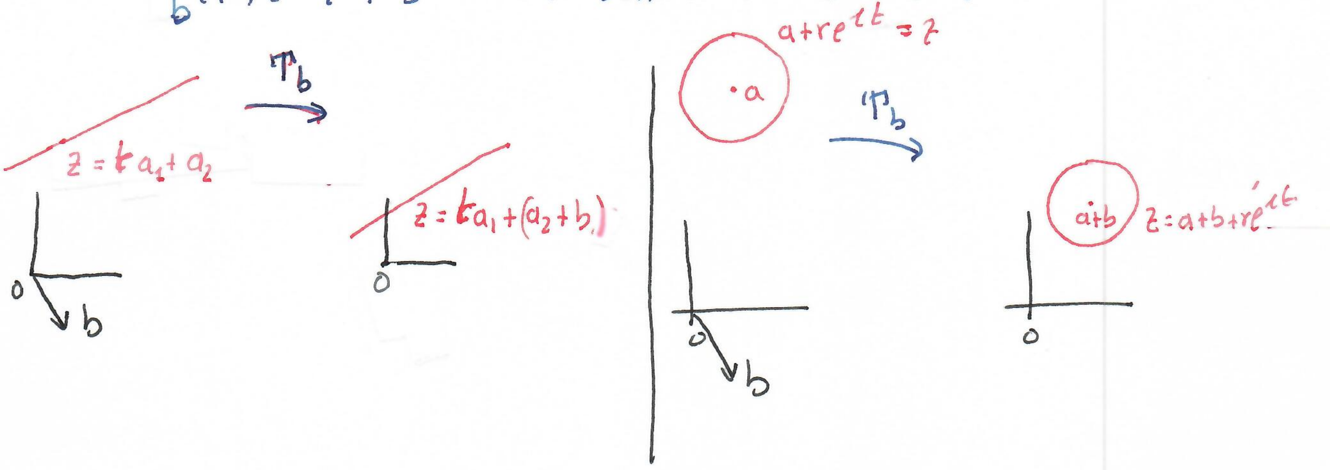
EJEMPLO: encontrar f t. Möbius tal que -1, ∞ y i se transforman en 0, 1 y ∞ respectivamente

DEM $f(z) = \dfrac{z+1}{z-i}$ c.q.d

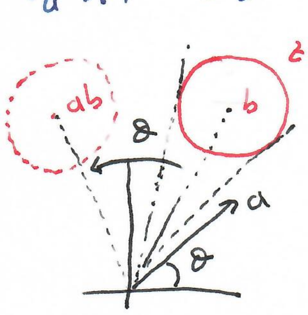
PROPIEDADES GEOMÉTRICAS DE LAS TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

DEFINICIÓN

$\tau_b(z) = z + b$ SE LLAMA TRANSLACIÓN



$r_a(z) = az$ CON $|a| = 1$, $a = e^{i\theta}$, SE LLAMA GIRO



$r_a(b + re^{it}) =$

$= ab + re^{it} \cdot e^{i\theta} =$

$= ab + re^{i(t+\theta)}$.

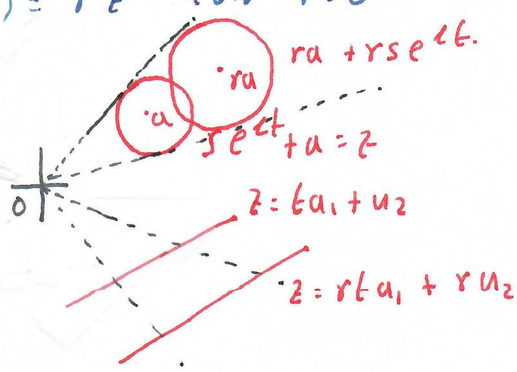
TAMBIÉN SI $z = ta_1 + a_2$

$az = ta_1 \cdot a + a_2 \cdot a$. LUEGO AL

GIRAR UNA RECTA TENGO OTRA RECTA.

$h_r(z) = rz$ CON $r > 0$ SE LLAMA UNA HOMOTECIA

$r > 1$



$I(z) = \frac{1}{z}$ SE LLAMA INVERSIÓN.

OBSERVACIÓN τ_b, r_a, h_r y I SON CASOS PARTICULARES DE TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS.

PROPOSSICIÓN TODA TRANSFORMACIÓN DE MÖBIUS ES COMPOSSICIÓN DE TRASLACIONES, GIROS, HOMOTECIAS E INVERSIONES:

DEM SEA $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ CON $ad-cb \neq 0$.

$$f(z) = \begin{cases} (*) \quad \dfrac{1}{cz+d} \cdot \dfrac{bc-ad}{c} + \dfrac{a}{c} & \text{SI } c \neq 0 \\[2ex] (**) \quad \dfrac{a}{d} z + \dfrac{b}{d} & \text{SI } c = 0 \end{cases}$$

$$(*) \quad f(z) = T_{\frac{a}{c}} \circ \underbrace{h_{\left|\frac{bc-ad}{c}\right|} \circ r_{Arg\left(\frac{bc-ad}{c}\right)} \circ I \circ T_{d}}_{\frac{bc-ad}{c} \times \frac{1}{cz+d}} \circ \underbrace{h_{|c|} \circ r_{Arg(c)}}_{c \times z} (z)$$

$$(**) \quad f(z) = T_{b/d} \circ h_{\left|\frac{a}{d}\right|} \circ r_{Arg\left(\frac{a}{d}\right)} (z).$$

TEOREMA EL CONJUNTO A DE RECTAS Y CIRCUNFERENCIAS, DEL PLANO ES INVARIANTE PARA TODA TRANSFORMACIÓN DE MÖBIUS (E.D. SI f ES UNA TRANSFORMACIÓN DE MÖBIUS ENTONCES $f(A) \subseteq A$.

DEM

LEMA SEA $I(z) = \frac{1}{z}$, ENTONCES TODA RECTA O CIRCUNFERENCIA DEL PLANO SE TRANSFORMA POR I EN OTRA RECTA O CIRCUNFERENCIA DEL PLANO

PROBADO ESTE LEMA, POR LA PROPOSICIÓN ANTERIOR TODA RECTA (O CIRCUNFERENCIA) SE TRANSFORMA POR TRASLACIONES, HOMOTECIAS GIROS E INVERSIONES LUEGO LLEGAMOS A OTRA RECTA O CIRCUNFERENCIA (O RECTA O CIRCUNFERENCIA RESPECTIVAMENTE).

LA INVERSIÓN GEOMÉTRICA

LEMA Sea $I(z) = \frac{1}{z}$ la inversión. El conjunto de rectas y circunferencias del plano es invariante por I.

DEM $\frac{1}{z} = \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$

Sean $f(z) = \bar{z}$

y $g(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ así $I = f \circ g$

$$f \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (x,-y) \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

f es una aplicación lineal y por tanto transforma rectas en rectas

Sea $C_{a,r} = \{z \in \mathbb{C} : |a - z| = r\}$

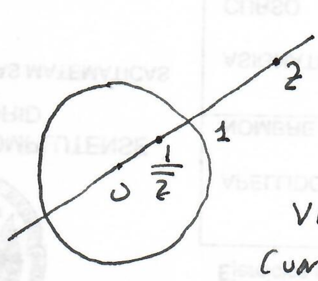
así $|f(a) - f(z)| = |\bar{a} - \bar{z}| = |\overline{a-z}| = |a-z| = r.$

luego $f(C_{a,r}) = C_{\bar{a},r}.$

DEF La aplicación $g \quad \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$
$$z \longrightarrow g(z) = \frac{1}{\bar{z}}, \quad g(0) = \infty.$$

Se la conoce con el nombre de inversión geométrica respecto de la circunferencia $\partial D(0,1)$

OBSERVACIÓN Como $z \longrightarrow \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$



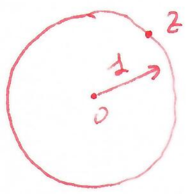
$g(z)$ es el punto sobre la semirrecta $0z$ de módulo $\frac{1}{|z|}$.

Veamos que la inversión geométrica conserva rectas y circunferencias y tendremos probado el lema.

PROPIEDADES DE LA INVERSIÓN GEOMÉTRICA

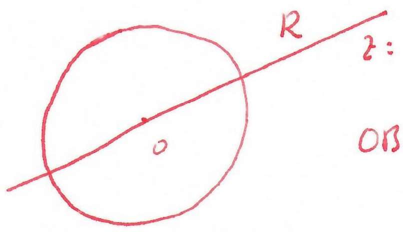
SEA $g(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ LA INVERSIÓN CON RESPECTO A $\partial D(0,1)$

1:] $\forall z \in \partial D(0,1)$ $g(z) = z$



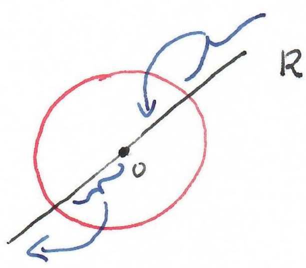
PUNTOS FIJOS : SI $|z|=1$ $\left|\frac{z}{|z|^2}\right| = \frac{1}{|z|} = 1$

2:] SEA $z = t\,a$ $a \in \mathbb{C}$, LA RECTA VECTORIAL R, ENTONCES $g(R) = R$.



$z = at$ $g(at) = \frac{1}{t\bar{a}} = \frac{1}{t}\frac{1}{|a|^2}a \in R.$

OBSERVACIÓN : LOS PUNTOS DE R NO PERMANECEN FIJOS, SALVO $\frac{a}{|a|}$ Y $-\frac{a}{|a|}$.



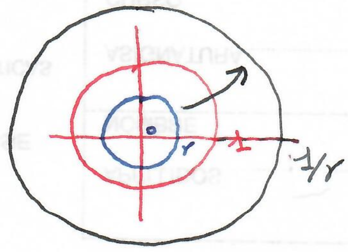
$g(0) = \infty$

Y $g(\infty) = 0$.

3:] SEA $C_{0,r}$ LA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO 0 Y RADIO r $g(C_{0,r}) = C_{0,1/r}$

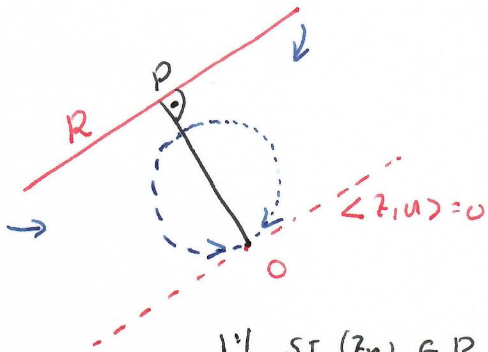
$z \in C_{0,r} \Rightarrow |z| = r$

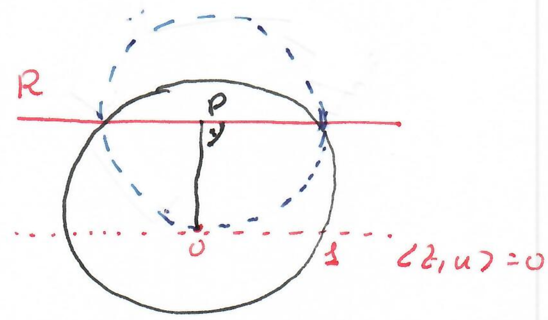
Y $\left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{\bar{z}} \in C_{0,\frac{1}{r}}$



PROPIEDADES DE LA INVERSIÓN GEOMÉTRICA

4:] SEA $R = \{z : \langle z, a\rangle + r = 0\}$, $r \neq 0$, UNA RECTA QUE NO PASA POR 0. $g(R)$ ES UNA CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR EL ORIGEN





1:] SI $(z_n) \in R$ y $|z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \Rightarrow \frac{1}{z_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ASÍ $g(\infty) = 0$ y $\frac{P}{|P|^2} \in g(R)$ CON $OP \perp \langle z,u\rangle = 0$.

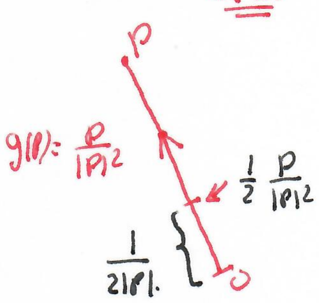
2:] $g(R)$ QUEDA DEL MISMO SEMIPLANO QUE R CON RESPECTO DE LA RECTA QUE PASA POR EL ORIGEN PARALELA A R (E.D. $\langle z,u\rangle = 0$).

(R ES CONEXO Y $g(R)$ ES CONEXO Y NO LO PUEDE SEPARAR $\langle z,u\rangle = 0$).

3:] SEA $P \in R$ CON $\min\{\mathrm{dist}(0,R)\} = \mathrm{dis}(0,P)$.

ENTONCES $g(R) = C_{\frac{1}{2|P|^2}P,\ \frac{1}{2|P|}}$

DEM R SE PUEDE ESCRIBIR COMO $\langle z, P\rangle - |P|^2 = 0$ ($P \perp R$ COMO $a \perp R$).



- CLARAMENTE $0 \in C_{\frac{1}{2|P|^2}P,\ \frac{1}{2|P|}}$.

AHORA $\left|g(z) - \frac{1}{2|P|^2}P\right|^2 \underset{z\in R}{=} \left\langle \frac{z}{|z|^2} - \frac{1}{2|P|^2}P, \frac{z}{|z|^2} - \frac{1}{2|P|^2}P \right\rangle =$

$= \frac{1}{|z|^2} - 2\frac{1}{2|P|^2}\frac{1}{|z|^2}\langle z, P\rangle + \frac{1}{4|P|^2} =$

$\langle z, P\rangle = |P|^2$

$= \frac{1}{|z|^2} - 2\frac{1}{2|P|^2} \cdot \frac{1}{|z|^2}|P|^2 + \frac{1}{4|P|^2} = \left(\frac{1}{2|P|}\right)^2$

LUEGO $g(R) \subseteq C_{\frac{1}{2|P|^2}P,\ \frac{1}{2|P|}}$. LA IGUALDAD SE DA POR CONEXIÓN.

PROPIEDADES DE LA INVERSIÓN GEOMÉTRICA

5ª] SEA $C_{a,|a|}$ UNA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO a Y QUE PASA POR $\underline{0}$ ENTONCES

$g(C_{a,|a|})$ ES UNA RECTA R

$$R=\{z : \langle z, \frac{1}{2\bar{a}}\rangle - \langle \frac{1}{2\bar{a}}, \frac{1}{2\bar{a}}\rangle = 0\}$$

DEM

$$g\circ g(z) = z \quad \text{ASÍ}$$

$$g(R) = C_{a,|a|} \quad \text{LUEGO}$$

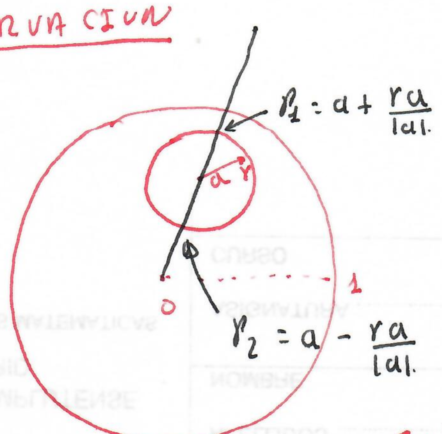
$$g^2(R) = R = g(C_{a,|a|}).$$

6ª] g^2 ES LA IDENTIDAD

7ª] SEA $C_{a,r}$ $a\neq 0$ y $r\neq|a|$ UNA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO a $(a\neq 0)$ Y RADIO $r\neq|a|$ (ASÍ $0\notin C_{a,r}$). ENTONCES $g(C_{a,r}) = C_{b,s}$ DONDE

$$b=\frac{1}{\left(1-\frac{r^2}{|a|^2}\right)\bar{a}} \quad y \quad s=\frac{r}{|a|^2-r^2} \quad ó \quad \frac{r}{r^2-|a|^2}$$

OBSERVACIÓN



$$b=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\bar{p}_1}+\frac{1}{\bar{p}_2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{r}{|a|}\right)\bar{a}}+\frac{1}{\left(1-\frac{r}{|a|}\right)\bar{a}}\right]=$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{r^2}{|a|^2}\right)\bar{a}}$$

$$s=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{\bar{p}_1}-\frac{1}{\bar{p}_2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{\frac{2r}{|a|}}{\left(1-\frac{r^2}{|a|^2}\right)\bar{a}}\right|=\frac{r}{||a|^2-r^2|}$$

DEM Si $z \in C_{a,r}$

$$r^2 = \langle z-a, z-a \rangle = |z|^2 + |a|^2 - 2\langle z,a \rangle$$

$$\text{y así} \quad \langle z,a \rangle = \frac{-r^2+|z|^2+|a|^2}{2} \quad (*)$$

Por otro lado si $z \in C_{a,r}$

$$\left|\frac{1}{z} - b\right|^2 = \left\langle \frac{1}{z} - \frac{1}{\left(1-\frac{r^2}{|a|^2}\right)\bar{a}}, \frac{1}{z} - \frac{1}{\left(1-\frac{r^2}{|a|^2}\right)\bar{a}} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{z}{|z|^2} - \frac{a}{|a|^2-r^2}, \frac{z}{|z|^2} - \frac{a}{|a|^2-r^2} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{|z|^2} + \frac{|a|^2}{(|a|^2-r^2)^2} - 2\frac{1}{|z|^2}\frac{1}{|a|^2-r^2}\langle z,a \rangle \overset{(*)}{=}$$

$$= \frac{1}{|z|^2} + \frac{|a|^2}{(|a|^2-r^2)^2} - 2\frac{1}{|z|^2}\frac{1}{|a|^2-r^2} \cdot \frac{-r^2+|z|^2+|a|^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{|z|^2} + \frac{|a|^2|z|^2 - [|a|^2-r^2](|z|^2+|a|^2-r^2)}{|z|^2(|a|^2-r^2)^2} =$$

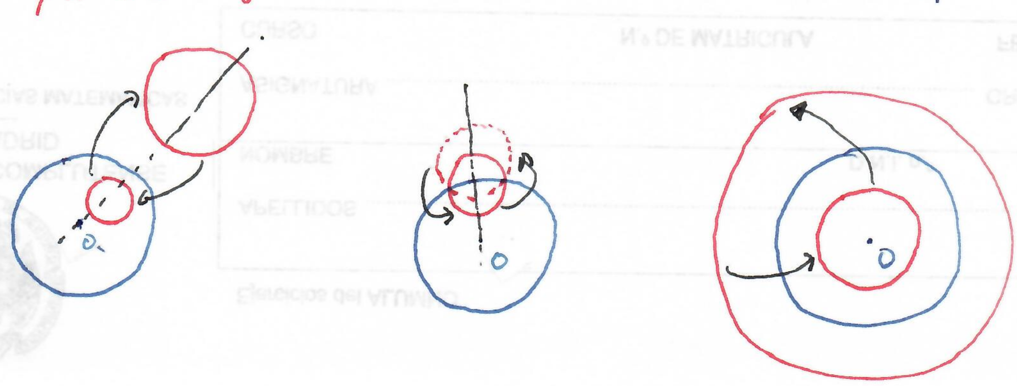
$$= \frac{1}{|z|^2} + \frac{\cancel{|z|^2|a|^2} - \cancel{|a|^2|z|^2} + r^2|z|^2 + [|a|^2-r^2]^2}{|z|^2(|a|^2-r^2)^2} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{|z|^2}} - \cancel{\frac{1}{|z|^2}} + \frac{r^2}{(|a|^2-r^2)^2}$$

ASÍ $\left|\frac{1}{z} - b\right|^2 = \frac{r^2}{(|a|^2-r^2)^2}$ y $\left|\frac{1}{z} - b\right| = \frac{r}{a^2-r^2} = s.$

Luego $g(C_{a,r}) \subseteq C_{b,s}$; como $g(C_{b,s}) \subseteq C_{a,r}$ ya que $g^2 = Id$. se tiene la igualdad.

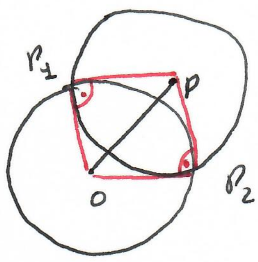
c.q.d



PROPIEDADES DE LA INVERSIÓN GEOMÉTRICA

8º) SEA C UNA CIRCUNFERENCIA ORTOGONAL A $\partial D(0,1)$, ENTONCES $g(C) = C$.

DEM.



POR ORTOGONALIDAD $0P_1 P P_2$ ES UN CUADRADO

ASÍ $C = C_{p,1}$, (C ES DE RADIO 1)

ASÍ $|p| = \sqrt{2}$, ASÍ $0 \notin C$ Y POR LA PROPIEDAD 7º)

$$g(C_{p,1}) = C_{b,s}$$ CON

$$b = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{|p|^2}\right)\bar{p}} = \frac{1}{(1-1/2)\,\bar{p}} = 2\frac{p}{|p|^2} = p.$$

Y $$s = \frac{1}{|p|^2 - 1} = \frac{1}{2-1} = 1.$$

— o —

OBSERVACIÓN:

ESTAMOS EN CONDICIONES DE DEFINIR UN MODELO DE GEOMETRÍA HIPERBÓLICA (NO EUCLÍDEA). VER POR EJEMPLO GAMELIN (pg 266)

CONSTRUCCIÓN DE TRANSFORMADAS DE MÖBIUS

OBSERVACIÓN SEA $R \subseteq \mathbb{C}$ UNA RECTA

SEA $C \subseteq \mathbb{C}$ UN CÍRCULO

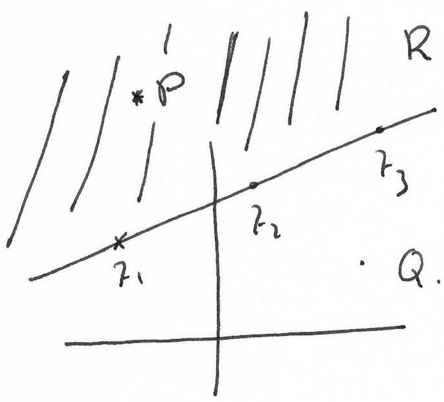
SEAN $z_1\, z_2\, z_3 \in R$ PUNTOS DISTINTOS (INCLUSO ∞).

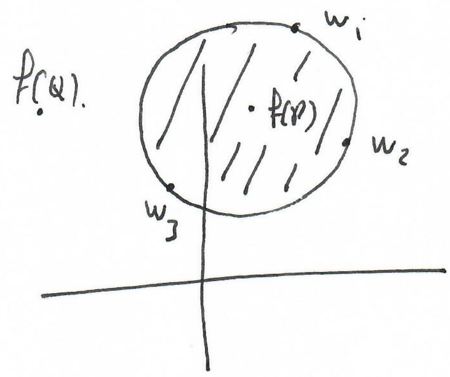
SEAN $w_1\, w_2\, w_2 \in C$ PUNTOS DISTINTOS.

EXISTE UNA ÚNICA TRANS. DE MÖBIUS

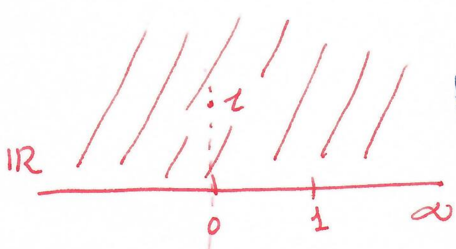
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{con } ad-bc \neq 0$$

TAL QUE $f(z_i) = w_i \quad i = 1, 2, 3.$

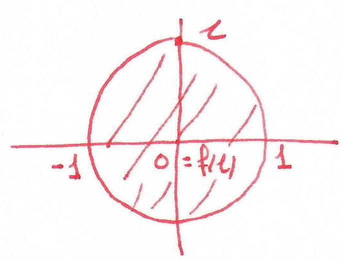




Ejemplo LA TRANSFORMACIÓN DE CAYLEY



$$f(z) = \frac{i-z}{i+z}$$



$f(0) = 1$

$f(\infty) = -1$

$f(1) = i$

COMO TRES PUNTOS DE UNA RECTA SE TRANSFORMAN EN TRES PUNTOS DE UNA CIRCUNFERENCIA, YA QUE CLARO QUE TODA LA RECTA SE TRANSFORMA EN LA CIRCUNFERENCIA.