AUTOMORFISMOS DEL DISCO UNIDAD

VAMOS A ESTUDIAR EL PROBLEMA DE LAS TRANSFORMACIONES BIYECTIVAS Y HOLOMORFAS DEL DISCO UNIDAD $D(0,1)$ EN SI MISMO.

TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO

SEA Ω UN ABIERTO CONEXO DE $\mathbb{C}$ Y SEA $f \in H(\Omega)$. SI EXISTE $z_0 \in \Omega$ Y $r>0$ CON $D(z_0,r) \subseteq \Omega$

Y $$|f(z_0)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in D(z_0,r).$$

ENTONCES $f \equiv cte$.

DEM SEA $[0,\rho] \subsetneq [0,r]$ Y SEA

$$\Phi \ [0,\rho] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t,\theta) \longrightarrow \Phi(t,\theta) = |f(z_0 + te^{i\theta})| - |f(z_0)|.$$

ASI DEFINIDA, Φ ES CONTINUA Y $\Phi \leq 0$..

SEA $\gamma_t(\theta) = z_0 + te^{i\theta}$, POR LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_t} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

ASI $$0 \leq M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + te^{i\theta})| \, d\theta.$$

Y ASI $$0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + te^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(t,\theta) d\theta.$$

$\forall t \in [0,\rho]$., ASI COMO $\Phi \leq 0$ SE SIGUE QUE $\Phi \equiv 0$

(EN OTRO CASO $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(t,\theta)\, d\theta < 0$ PARA ALGUN t)

LUEGO $|f| \equiv cte$ EN $D(z_0,r)$, ASI USANDO LAS IGUALDADES DE CAUCHY RIEMANN $f \equiv cte$ EN $D(z_0,r)$.
Y POR SER Ω CONEXO Y LO PRINCIPIO DE IDENTIDAD $f \equiv cte$ EN Ω..

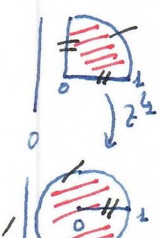
OBSERVACIÓN:

SEA $f: \overline{D(0,1)} \longrightarrow \overline{D(0,1)}$, $f \in H(D(0,1))$, CONTINUA EN $\overline{D(0,1)}$, f BIYECTIVA Y $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in D(0,1)$.

VEAMOS QUE $f(\partial D(0,1)) \subseteq \partial D(0,1)$

Y QUE $f(D(0,1)) \subseteq D(0,1)$

ESEMPLO



NO ES INYECTIVA

SI $z \in D(0,1)$ Y $|f(z)| = 1$, TENDRÍAMOS QUE $f \equiv ct$ (POR EL TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO).

SI $z \in \partial D(0,1)$ Y $|f(z)| < 1$, ENTONCES

$|f^{-1}(f(z))| = 1$ ASÍ $f^{-1} \equiv ct$

(POR EL TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO).

VEAMOS QUE ESTE TIPO DE TRANSFORMACIONES SON UN CASO ESPECIAL DE TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS

EL SIGUIENTE LEMA ES MUY ÚTIL.

LEMA (DE SCHWARZ). SEA $f: D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ CON $f \in H(D(0,1))$, $f(0) = 0$ Y ADEMÁS $|f(z)| \leq 1$ $\forall z \in D(0,1)$ (E.D. $f(D(0,1)) \subseteq \overline{D(0,1)}$).

ENTONCES:

a) $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z \in D(0,1)$. (ASÍ $f(D(0,1)) \subseteq D(0,1)$)

b) $|f'(0)| \leq 1$.

ADEMÁS SI PARA ALGÚN $z_0 \in D(0,1) - \{0\}$, $|f(z_0)| = |z_0|$ O BIEN $|f'(0)| = 1$ ENTONCES f ES UN GIRO (E.D. EXISTE $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ CON $f(z) = \lambda z$ $\forall z \in D(0,1)$).

DEM a) SEA $g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{SI } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{SI } z = 0. \end{cases}$

$g \in H(D(0,1))$ YA QUE $\lim_{z \to 0} g(z) = f'(0) = g(0)$.

[$g \in H(D(0,1) \setminus \{0\})$ Y TIENE UNA SINGULARIDAD EVITABLE EN $z = 0$]

AHORA $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ $\forall z \in \{w \in \mathbb{C} : |w| = r\}$. CON $0 < r < 1$.

ENTONCES $\sup_{z \in D(0,r)} |g(z)| = \sup_{|z| = r} |g(z)| \leq \frac{1}{r}$

TEOREMA DEL MODULO MÁXIMO

Y ASI $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ $\forall z \in \mathbb{C} : |z| \leq r$, $0 < r < 1$.

ASI $|g(z)| \leq 1$ $\forall z \in D(0,1)$

Y COMO $\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq 1$ $\forall z \in D(0,1) \Rightarrow |f(z)| \leq |z|$ $\forall z \in D(0,1)$.

b) $|g(z)| \leq 1$ $\forall z \in D(0,1)$, EN PARTICULAR $|g(0)| = |f'(0)| \leq 1$.

ADEMAS SI EXISTE $z_0 \in D(0,1) \setminus \{0\}$ CON $|f(z_0)| = |z_0|$.

ENTONCES $|g(z_0)| = 1$, COMO $|g(z)| \leq 1$ $\forall z \in D(0,1)$

ASI $|g|$ ALCANZA SU MAXIMO EN z_0 LUEGO $g \equiv ct$

DE OTRO MODO, SI $|f'(0)| = 1$, COMO $|g(0)| = |f'(0)| = 1$

$|g|$ ALCANZA SU MÁXIMO EN $z = 0$ LUEGO $g \equiv ct$

EN AMBOS CASOS $g(z) = \lambda$ $\forall z \in D(0,1)$ (POR EL TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO) Y COMO EN ALGÚN PUNTO $|g| = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$

Y ASI $\frac{f(z)}{z} = \lambda \Leftrightarrow f(z) = \lambda z$ CON $|\lambda| = 1$.

LUEGO f ES UN GIRO.

DEFINICIÓN SE LLAMA AUTOMORFISMO DE $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ A CUALQUIER APLICACIÓN

$$f\ \Omega \longrightarrow \Omega.$$

f BIYECTIVA Y f Y f^{-1} HOLOMORFAS EN Ω.

TEOREMA PARA CADA $\alpha \in D(0,1)$ LA APLICACIÓN

$$\varphi_\alpha\ \overline{D(0,1)} \longrightarrow \overline{D(0,1)}$$

$$z \longrightarrow \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z}$$

ES UNA BIYECCIÓN DE $\overline{D(0,1)}$ EN SI MISMO CON $\varphi_\alpha(\partial D(0,1)) = \partial D(0,1)$. ADEMÁS $\varphi_\alpha \in H(\Omega)$ CON Ω ABIERTO TAL QUE $\overline{D(0,1)} \subseteq \Omega$.

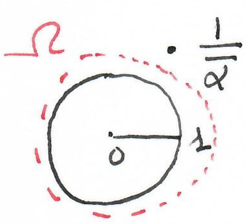
ADEMÁS $$\varphi_{-\alpha}(z) = \frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha} z}$$

ES LA INVERSA DE φ_α CON ANÁLOGAS PROPIEDADES.

OBSERVACIÓN $\varphi_\alpha(z) = \dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha} z}$, $1-(-\alpha)(-\bar{\alpha}) = 1-|\alpha|^2 > 0$

LUEGO φ_α Y $\varphi_{-\alpha}$ SON TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS QUE LLEVAN EL DISCO UNIDAD EN SI MISMAS

DEM SI $|\alpha| < 1$ $\quad 1-\bar{\alpha} z = 0 \Rightarrow z = \dfrac{1}{\bar{\alpha}} \notin \overline{D(0,1)}$



SEA $1 < R < \left|\dfrac{1}{\bar{\alpha}}\right|$ ASÍ $\varphi_\alpha \in H(D(0,R))$.

POR SER φ_α Y $\varphi_{-\alpha}$ TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS SON BIYECTIVA, HOLOMORFAS EN $D(0,R)$

$$|\varphi_\alpha(e^{i\theta})| = \left|\frac{e^{i\theta}-\alpha}{1-\bar{\alpha} e^{i\theta}}\right| = \left|\frac{e^{i\theta}-\alpha}{e^{i\theta}[e^{-i\theta}-\bar{\alpha}]}\right| =$$

$$= \left|\frac{e^{i\theta}-\alpha}{e^{-i\theta}-\bar{\alpha}}\right| = \left|\frac{e^{i\theta}-\alpha}{\overline{e^{i\theta}-\alpha}}\right| = 1,$$ LUEGO COMO φ_α LLEVA CIRCUNFERENCIAS EN CIRCUNFERENCIAS O RECTAS

$$\varphi_\alpha(\partial D(0,1)) = \partial D(0,1)$$

COMO $\varphi_\alpha(0) = \alpha \in D(0,1)$, POR CONEXIÓN $\varphi_\alpha(D(0,1)) = D(0,1)$.

SI $w = \varphi_\alpha(z)$ DESPEJANDO $z = \varphi_{-\alpha}(w)$.

TEOREMA a) Los únicos automorfismos del disco unidad que fijan el 0 son los giros.

b) Todo automorfismo del disco unidad es de la forma $f = \lambda f_\alpha$ con $\alpha \in D(0,1)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$

DEM a) Sea f un automorfismo de $D(0,1)$ con $f(0)=0$. Por el lema de Schwarz.

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in D(0,1)$$

f^{-1} está en las mismas condiciones que f. Así por el lema de Schwarz de nuevo

$$|f^{-1}(f(z))| = |z| \leq |f(z)| \quad \forall z \in D(0,1)$$

Así $|f(z)| = |z|$. $\forall z \in D(0,1)$. y de nuevo por el lema de Schwarz $\exists \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$

con $f(z) = \lambda z$ c.q.d

b) Sea f un automorfismo de $D(0,1)$. con $f(0) = \alpha \in D(0,1)$. Existe $\beta \in D(0,1) \setminus \{0\}$. con $f(\beta) = 0$. Sea el automorfismo f_β y así $f \circ f_\beta$ es un automorfismo del disco con $f \circ f_\beta(0) = f(\beta) = 0$,

por a) $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ y $f \circ f_\beta(z) = \lambda z$

Ahora $f(z) = \lambda f_{+\beta}(z) \quad \forall z \in D(0,1)$

—o—

LEMA

EL SIGUIENTE LEMA ES ESENCIAL EN LA PRUEBA DEL TEOREMA DE LA APLICACION DE RIEMANN.

LEMA SEA $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ CON $|f(z)| \leq 1$ $\forall z \in D(0,1)$. SEAN $\alpha, \beta \in D(0,1)$ CON $f(\alpha) = \beta$, ENTONCES

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$$

DEM SE CONSIDERA $g = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}$, φ_β Y $\varphi_{-\alpha}$ AUTOMORFISMOS DEL DISCO. CLARAMENTE

$$g \in \mathcal{H}(\Omega)$$

Y $|g(z)| \leq 1$ $\forall z \in D(0,1)$.

ADEMÁS $g(0) = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}(0) = \varphi_\beta \circ f(\alpha) = 0$.

EL LEMA DE SCHWARZ.

$$|g'(0)| \leq 1.$$

LA REGLA DE LA CADENA, NOS DICE QUE

$$g'(0) = \varphi_\beta'(\beta) \cdot f'(\alpha) \cdot \varphi_{-\alpha}'(0)$$

SEA $\varphi_a = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $\varphi_a'(z) = \frac{(1-\bar{a}z)+\bar{a}(z-a)}{(1-\bar{a}z)^2} = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$

ASI $\varphi_a'(0) = 1-|a|^2$ Y $\varphi_a'(a) = \frac{1-|a|^2}{(1-|a|^2)^2} = \frac{1}{1-|a|^2}$

LUEGO $|g'(0)| = \frac{1}{1-|\beta|^2} |f'(\alpha)| (1-|\alpha|^2) \leq 1$

ASI $|f'(\alpha)| \leq \frac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$.