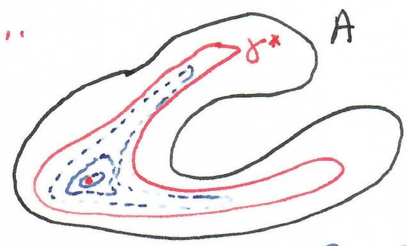
TEOREMA DE LA APLICACIÓN DE RIEMANN.

DEF UN CONJUNTO $A \subseteq X$ CONEXO, SE LLAMA SIMPLEMENTE CONEXO SI TODA CURVA CERRADA CONTINUA γ, CON $\gamma^* \subset A$, ES HOMOTÓPICA A UN PUNTO.

EJEMPLO: TODO CONJUNTO CONVEXO ES SIMPLEMENTE CONEXO

OBSERVACIÓN UN SIMPLEMENTE CONEXO ES UN CONJUNTO DEL PLANO SIN "AGUJEROS"



DEF DECIMOS QUE DOS REGIONES Ω_1 Y Ω_2 DEL PLANO $\mathbb{C}$, ABIERTOS Y CONEXOS, SON CONFORMEMENTE EQUIVALENTES SI EXISTE $f \in H(\Omega_1)$ TAL QUE

$$f: \Omega_1 \to \Omega_2$$

ES BIYECTIVA Y $(f^{-1}) \in H(\Omega_2)$.

EJEMPLO $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ ES CONFORMEMENTE EQUIVALENTE A $D(0,1)$, A TRAVÉS DE LA TRANSFORMACIÓN DE CAYLEY $f(z) = \dfrac{i-z}{i+z}$.

TEOREMA (DE LA APLICACIÓN DE RIEMANN) TODA REGIÓN SIMPLEMENTE CONEXA $\Omega \neq \mathbb{C}$, ABIERTO SIMPLEMENTE CONEXO DE $\mathbb{C}$ DISTINTO DE $\mathbb{C}$, ES CONFORMEMENTE EQUIVALENTE AL DISCO UNIDAD $D(0,1)$.

OBSERVACIÓN $f: \mathbb{C} \to D(0,1)$ CON $f \in H(\mathbb{C}) \Rightarrow f = cte$ YA QUE f ES ENTERA Y $|f| \leq 1$, LUEGO POR EL TEOREMA DE LIOUVILLE $f = cte$.

OBSERVACIÓN: SEA Ω ABIERTO SIMPLEMENTE CONEXO Y SEA $f: \Omega \to D(0,1)$ TRANSFORMACIÓN CONFORME

$$(*)\begin{cases} - \ \mathcal{H}(\Omega) \text{ ES UN ESPACIO VECTORIAL.} \\ - \ T_f \quad \mathcal{H}(D(0,1)) \longrightarrow \mathcal{H}(\Omega) \quad \text{ES UNA APLICACIÓN LINEAL.} \\ \qquad\qquad f \longrightarrow f \circ f \end{cases}$$

- UN PROBLEMA SOBRE Ω, LO PODEMOS TRASLADAR A UN PROBLEMA SOBRE $D(0,1)$ Y ALLÍ RESOLVERLO (POR EJEMPLO $\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g. \end{cases}$

OBSERVACIÓN HISTÓRICA

RIEMANN ($\sim$ 1851) ENUNCIÓ EL RESULTADO QUE LLEVA SU NOMBRE, PERO SU DEMOSTRACIÓN NO ERA CORRECTA

ASCOLI (1883), ARZELA (1889) TEOREMA DE ASCOLI-ARZELA

MONTEL (1907) TEOREMA DE MONTEL.

FEJER Y RIESZ (1922) ESTOS MATEMÁTICOS HÚNGAROS DAN UNA PRUEBA CORRECTA DEL TEOREMA DE RIEMANN USANDO EL TEOREMA DE MONTEL (TÉCNICAS FUNCIONALES. (*)).

(VER REMMERT "CLASSICAL TOPICS IN COMPLEX FUNCTION THEORY" (PG 160 Y 181).

NECESIDAD DEL ANÁLISIS FUNCIONAL

- SI $(x_n) \subseteq [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, (x_n) SUCESIÓN INFINITA, $\exists\, x_{n_k} \to x$.

- SI $(x_n) \subseteq K \subseteq \mathbb{R}^n$, K COMPACTO, $\exists\, x_{n_k} \to x \in K$.

- SI $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ ES INTEGRABLE EN $[a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ Y $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE, ENTONCES
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

(ESTE RESULTADO HA SIDO EMPLEADO CON ASIDUIDAD EN TODA LA TEORÍA DE CAUCHY DE FUNCIONES HOLOMORFAS.)

- SI $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ Y $f_n \to f$ UNIFORMEMENTE SOBRE LOS COMPACTOS DE Ω (E.D. $\forall K \subseteq \Omega$ Y $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ $\forall z \in K$), ENTONCES $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ Y $f_n' \to f'$.

- PREGUNTA: ¿CUÁNDO $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ VERIFICA QUE $\exists\, f_{n_k} \to f$ UNIFORMEMENTE SOBRE LOS COMPACTOS DE Ω? (TEOREMA DE MONTEL)

DEFINICIÓN DE SUCESIÓN NORMAL

SEA $F \subseteq H(\Omega)$, Ω ABIERTO Y CONEXO. SI F ESTÁ UNIFORMEMENTE ACOTADO SOBRE LOS COMPACTOS DE Ω (o.d. $\forall K \subseteq \Omega$ COMPACTO $\Rightarrow \exists M_K > 0$ CON $|f(z)| \leq M_K$ $\forall f \in F$ Y $\forall z \in K$) ENTONCES F ES NORMAL.

TEOREMA

PARA TODA REGIÓN PLANA Ω, E.D. $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$, ABIERTO CONEXO, SON EQUIVALENTES.

a) Ω ES CONFORMEMENTE EQUIVALENTE A $D(0,1)$

b) Ω ES SIMPLEMENTE CONEXO.

c) $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha)=0$ PARA TODO CAMINO CERRADO γ, $\gamma^* \subseteq \Omega$ Y $\forall \alpha \in \mathbb{C} - \Omega$.

d) PARA TODA $f \in H(\Omega)$ Y TODO CAMINO CERRADO γ, $\gamma^* \subseteq \Omega$,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$ (TEOREMA DE CAUCHY-GLOBAL.)

e) SI $f \in H(\Omega)$, ENTONCES EXISTE $F \in H(\Omega)$ CON $F' = f$.

f) SI $f \in H(\Omega)$ Y $\frac{1}{f} \in H(\Omega)$, EXISTE $g \in H(\Omega)$ TAL QUE $f(z) = e^{g(z)}$

g) SI $f \in H(\Omega)$ Y $\frac{1}{f} \in H(\Omega)$, EXISTE $\varphi \in H(\Omega)$ TAL QUE $f(z) = \varphi^2(z)$.

OBSERVACIÓN: PROBAREMOS $a \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow e) \Rightarrow f \Rightarrow g)$. CERRAR EL CÍRCULO $g) \Rightarrow a)$, ES EL PASO DIFÍCIL Y TENDREMOS QUE USAR TÉCNICAS FUNCIONALES (TEOREMA DE MONTEL).

LA PRIMERA CADENA DE IMPLICACIONES NOS LLEVA A REPASAR MUCHOS RESULTADOS YA ESTUDIADOS

DEMOSTRACIÓN

$a \Rightarrow b$ | $D(0,1)$ ES CONVEXO Y POR TANTO SIMPLEMENTE CONEXO.

SI $\exists f: \Omega \to D(0,1)$ BIYECTIVA CON $f \in H(\Omega)$ Y $f^{-1} \in H(D(0,1))$

SEA $\gamma\, [a,b] \to \Omega$ CURVA CERRADA, ASÍ

$\Gamma = f \circ \gamma\, [a,b] \to D(0,1)$ ES UNA CURVA CERRADA

SEA $0 \in D(0,1)$ Y.

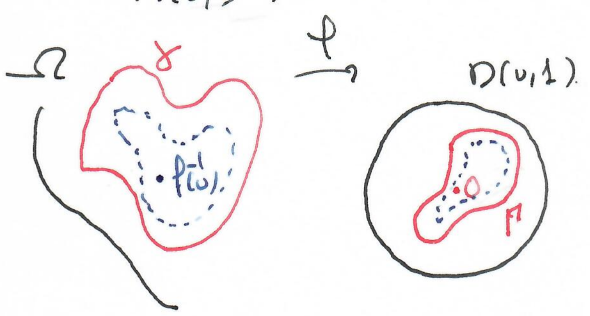
$H(t,s) = t\,\Gamma(s)$. $\quad H\, [0,1] \times [a,b] \to D(0,1)$

$(t,s) \longrightarrow (1-t)0 + t\,\Gamma(s)$.

$H(0,s) = 0 \quad H(1,s) = \Gamma(s)$.

$H(t,a) = H(t,b) \quad \forall t \in [0,1]$

H CONTINUA



SEA $K: f^{-1} \circ H\, [0,1] \times [a,b] \longrightarrow \Omega$.

$(t,s) \longrightarrow f^{-1}(t\,\Gamma(s))$

$K(0,s) = f^{-1}(0)$

$K(0,1) = f^{-1}(\Gamma(s)) = f^{-1} \circ f \circ \gamma(s) = \gamma(s)$

$K(t,a) = f^{-1}(t\,\Gamma(a)) = f^{-1}(t\,\Gamma(b)) = K(t,b) \quad \forall t \in [0,1)$

K ES CONTINUA.

LUEGO γ^* ES HOMÓTOPA AL PUNTO $f^{-1}(0)$.

DEMOSTRACIÓN

b ⇒ c) (VISTO EN LA PRUEBA DEL TEOREMA DE CAUCHY - GLOBAL PARA SIMPLEMENTE CONEXOS).

SEA $\gamma^* \subset \Omega$ CURVA CERRADA Y SEAN

$$C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n = \mathbb{C} - \gamma^*$$

COMPONENTES CONEXAS ABIERTAS DE $\mathbb{C} - \gamma^*$

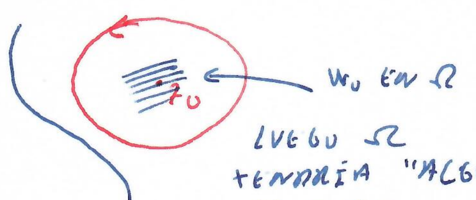
SI C_1 ES LA COMPONENTE NO ACOTADA

ENTONCES $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0 \quad \forall z \in C_1$

VEAMOS QUE NO EXISTE $z_0 \in C_j$ $j \neq 1$ CON

$z_0 \notin \Omega$ Y $\operatorname{Ind}_\gamma(z_0) \neq 0$

POR SER Ω SIMPLEMENTE CONEXO $\exists\, H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$.



CON $H(s,0) = \gamma(s)$

$H(s,1) = \alpha \in \Omega$

LUEGO Ω TENDRÍA "ALGÚN" AGUJERO.

Y $H(0,t) = H(1,t) \quad \forall t \in [0,1]$

ASÍ POR HABER HOMOTOPÍA ENTRE γ Y $H(\cdot,1) = \alpha$.

Y COMO $z_0 \notin \Omega$ SE SIGUE QUE

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z_0) = \operatorname{Ind}_{H(\cdot,1)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{H(\cdot,1)} \frac{1}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\overbrace{H'(s,1)}^{=0}}{\alpha - z_0}\, dt = 0$$

c ⇒ d) ESTE ES EL TEOREMA DE CAUCHY - GLOBAL.

Ω ES UN ABIERTO CONEXO

$\gamma^* \subseteq \Omega$ ES UNA CAMINO CERRADO

POR HIPÓTESIS $\operatorname{Ind}_\gamma(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \notin \Omega$ (c)

ESTAS SON LAS HIPÓTESIS DE TEOREMA DE CAUCHY GLOBAL ASÍ $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz = 0$

DEMOSTRACIÓN

d ⟹ e | ES LA MISMA PRUEBA QUE SE USA EN EL TEOREMA DE MORERA Y EN EL TEOREMA DE CAUCHY-LOCAL (UNA VEZ QUE TENEMOS EL TEOREMA DE CAUCHY PARA TRIÁNGULOS.).

- ESTAMOS SUPONIENDO Ω CONEXO POR CAMINOS.
- SE PUEDE HACER LA PRUEBA EN CADA $D(w,r) \subseteq \Omega$. ENCONTRAR $F \in H(D(w,r))$ Y EXTENDER SOLAPANDO DISCOS USANDO LOS TEOREMAS DE IDENTIDAD.

SEA $z_0 \in \Omega$ Y SEA

$$F(z) = \int_{\Gamma(z)} f(\tau)\, d\tau$$

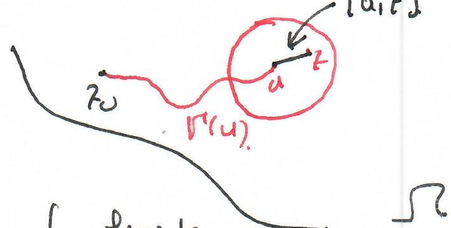
DONDE Γ CAMINO DE z_0 A z.

(SI R ES OTRO CAMINO DE z_0 A z ASÍ

$$\underset{\text{por d)}}{0} = \int_{\Gamma - R} f(\tau)\, d\tau = \int_\Gamma f(\tau)\, d\tau - \int_R f(\tau)\, d\tau \Rightarrow \int_\Gamma f = \int_R f.)$$

ESTA DEFINICIÓN NO DEPENDE DEL CAMINO Γ ELEGIDO.

VEAMOS QUE $F' = f$. SEA $a \in \Omega$ Y SEA $r > 0$ CON $D(a,r) \subseteq \Omega$



$\forall z \in D(a,r)$

$$\frac{F(z) - F(a)}{z-a} = \frac{\int_{\Gamma(a)+[a,z]} f(\tau)\,d\tau - \int_{\Gamma(a)} f(\tau)\,d\tau}{z-a} =$$

$$= \frac{\int_{[a,z]} f(\tau)\,d\tau}{z-a} = \frac{\int_0^1 f((1-\alpha)a + \alpha z)(z-a)\,d\alpha}{z-a}$$

$$\begin{aligned} [0,1] &\longrightarrow [a,z] \\ \alpha &\longrightarrow (1-\alpha)a + \alpha z \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 f((1-\alpha)a + \alpha z)\,d\alpha \xrightarrow[z \to a]{} f(a)$$

SEA $z_n \to a$.

$$\begin{aligned} f_n \quad [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \alpha &\longrightarrow f_n((1-\alpha)a + \alpha z_n) \longrightarrow f(a) \end{aligned}$$ UNIFORMEMENTE EN $[0,1]$.

ASÍ $F'(a) = f(a)$.

DEMOSTRACIÓN

e) $\Rightarrow$ f) Si $f \in H(\Omega)$ y $\frac{1}{f} \in H(\Omega)$, así $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$, se sigue que $f'/f \in H(\Omega)$.

y por la hipótesis e) existe $g \in H(\Omega)$ con $g' = f'/f$

Sea $a = ct$ tal que $\exp(g(z_0) + a) = f(z_0)$ para algún $z_0 \in \Omega$. Y defino $G(x) = g(x) + a$; $G' = f'/f$

Este "a" lo encontramos de la siguiente manera:

$$e^a = e^{-g(z_0)} \cdot f(z_0)$$

y así $a = \lg(e^{-g(z_0)} \cdot f(z_0))$ para algún logaritmo de $e^{-g(z_0)} f(z_0)$

Sea $h(z) = f(z)\, e^{-G(z)}$

$$h'(z) = f'(z)\, e^{-G(z)} - f(z) \frac{f'(z)}{f(z)} e^{-G(z)} \equiv 0$$

por ser Ω conexo se sigue que $h(z) \equiv ct$

(claro en $D(z_0, r) \subseteq \Omega$ $\quad h(z) = h(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k = h(z_0)$ en $D(z_0, r)$. Por los teoremas de identidad se sigue el resultado)

Así $f(z) \equiv ct\, e^{G(z)}$, como $f(z_0) = e^{G(z_0)}$ se sigue que $ct \equiv 1$.

f $\Rightarrow$ g) Si $f(z)$ y $\frac{1}{f(z)} \in H(\Omega)$, existe $g \in H(\Omega)$ con $f(z) = e^{g(z)}$. Sea $\varphi(z) = e^{\frac{g(z)}{2}} \in H(\Omega)$ y claramente $\varphi^2(z) = (e^{g(z)/2})^2 = e^{g(z)} = f(z)$

OBSERVACIÓN 2 se puede sustituir por de IN.

$\boxed{\text{g} \Rightarrow \text{a. CASO DIFÍCIL.}}$

COROLARIO SI $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ABIERTO, ENTONCES SI $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$, $\log|f|$ ES ARMÓNICA EN Ω.

DEM SEA $D \subset \Omega$ UN DISCO (POR TANTO D ES SIMPLEMENTE CONEXO). ASI POR EL APARTADO f) DEL TEOREMA ANTERIOR $\exists\, g \in H(D)$ TAL QUE $f(z) = e^{g(z)}$ EN D.

SI $u = \operatorname{Re} g$, ENTONCES u ES ARMÓNICA (POR LAS IGUALDADES DE CAUCHY-RIEMANN) EN D Y ASI $|f| = e^{u}$. POR TANTO $\log|f| = u$. ES ARMÓNICA EN CADA DISCO Y EN Ω..