TÉCNICAS FUNCIONALES:

EL TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA Y EL TEOREMA DE MONTEL.

LOS TEOREMAS SIGUIENTES, DE MONTEL Y DE LA APLICACIÓN ABIERTA, SON ESENCIALES PARA PROBAR EL TEOREMA DE LA APLICACIÓN DE RIEMANN. ADEMÁS SON TÉCNICAS QUE NOS CONECTAN CON EL ANÁLISIS FUNCIONAL.

TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA.

SEA $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ABIERTO Y SEA $f \in H(\Omega)$. ENTONCES SI $f \not\equiv cte$ SE TIENE QUE $f(\Omega)$ ES ABIERTO.

<u>OBSERVACIÓN</u>: EN ANÁLISIS FUNCIONAL SE TIENE ESTE RESULTADO MÁS COMPLEJO:

SEAN X, Y ESPACIOS DE BANACH Y $T: X \to Y$ UN OPERADOR LINEAL, CONTINUO Y SOBREYECTIVO, ENTONCES T ES ABIERTO.

<u>OBSERVACIÓN</u>: UNA PRUEBA SENCILLA DEL TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA SE SIGUE DEL PRINCIPIO DEL ARGUMENTO

SI $f: \Omega \to \mathbb{C}$, SEA $w_0 \in f(\Omega)$, ASÍ $\exists z_0 \in \Omega$ Y $r>0$ CON $D(z_0, r) \subseteq \Omega$. AHORA POR EL PRINCIPIO DEL ARGUMENTO $\exists V$ ENTORNO DE w_0 TAL QUE $\forall w \in V$ $\exists z \in \Omega$ CON $f(z) = w$, ASÍ $V \subseteq f(\Omega)$ c.q.d.

DEMOSTRACION

SEA $w_0 \in f(\Omega)$ Y TENEMOS QUE ENCONTRAR $S>0$ CON

$$D(w_0,S) \subseteq f(\Omega)$$

SEA $z_0 \in \Omega$, CON $f(z_0)=w_0$. SEA $g(z)=f(z)-w_0$, $z\in\Omega$.

ASI $g(z) \in H(\Omega)$ Y $g(z_0)=0$. COMO $g \not\equiv 0$ ($f \not\equiv C$)

EXISTE $r>0$ TAL QUE $g(z)\neq 0$ $\forall z \in \overline{D}(z_0,r)\setminus\{z_0\}$.

(USAMOS AQUI LOS TEOREMAS DE IDENTIDAD)

EN PARTICULAR $g(z)\neq 0$ $\forall z\in \partial D(z_0,r)$.

COMO $\partial D(z_0,r)$ ES COMPACTO Y g ES CONTINUA,

EXISTE $z^* \in \partial D(z_0,r)$ CON $0<|g(z^*)| \leq g(z)$ $\forall z\in\partial D(z_0,r)$

SEA $S=\frac{1}{2}\inf\{|g(z)| : z\in \partial D(z_0,r)\}$.

VEAMOS QUE $D(w_0,S) \subseteq f(\Omega)$.

SEA $w\in D(w_0,S)$ Y SEA $h(z)=f(z)-w$ $z\in\Omega$.

$h\in H(\Omega)$ Y

$$\begin{cases} |h(z_0)| = |w_0-w| < S \\ |h(z)| = |f(z)-w_0-(w-w_0)| \geq \\ \quad \geq |g(z)|-|w-w_0| \geq 2S-S=S \quad \forall z\in\partial D(z_0,r) \end{cases}$$

$||a|-|b|| \leq |a-b|$.

$h\in H(\Omega)$ Y EN PARTICULAR $h \in H(\overline{D}(z_0,r))$.

Y $|h(z_0)|< S \leq |h(z)|$ $\forall z\in\partial D(z_0,r)$.

SI NO EXISTE $z\in\overline{D(z_0,r)}$ CON $h(z)=0$,

ENTONCES $\frac{1}{h}\in H(\overline{D(z_0,r)})$ Y

$\left|\frac{1}{h(z_0)}\right| > \frac{1}{|h(z)|}$ $\forall z\in\partial D(z_0,r)$ LO QUE

CONTRADICE EL TEOREMA DEL MODULO MÁXIMO

ASI $\exists\, z\in D(z_0,r)$ CON $h(z)=f(z)-w=0 \Rightarrow f(z)=w$

Y ASI $D(w_0,S)\subseteq f(\Omega)$. c.q.d

TEOREMA DE ASCOLI-ARZELÁ

EL PROBLEMA DE LOS COMPACTOS:

EN ANÁLISIS, UNA TÉCNICA HABITUAL ES
TENIENDO UNA SUCESIÓN $(x_n) \subseteq X$.
EXTRAER UNA SUBSUCESIÓN
$$x_{n_k} \longrightarrow x \in X.$$

EJEMPLO

- TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS

i) SI $(x_n) \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ EXISTE $x_{n_k} \longrightarrow x \in [a,b]$.

ii) SI $(x_n) \subseteq [a,b]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ " $x_{n_k} \longrightarrow x \in [a,b]^n$.

DEFINICIÓN EN UN ESPACIO MÉTRICO X UN SUBCONJUNTO $K \subseteq X$ SE LLAMA COMPACTO.
SI $\forall (x_n) \subseteq K$ $\exists\, x_{n_k} \longrightarrow x \in K$
$$\downarrow$$
$(\forall \varepsilon > 0 \;\exists k_0 : k \geq k_0 \quad d(x, x_{n_k}) \leq \varepsilon.)$

PROPOSICIÓN: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ES COMPACTO $\Longleftrightarrow$ K ES CERRADO Y ACOTADO.

EJEMPLO SEA $C[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ CONTINUA} \}$
SI $\operatorname{dist}(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \|f-g\|_\infty = \sup\{ |f - g(x)| : x \in [0,1] \}$
$(C[0,1] \; \| \; \|_\infty)$ ES UN ESPACIO MÉTRICO COMPLETO.

SEA $K \subseteq C[0,1]$ $K = \{ f \in C[0,1] : \|f\|_\infty \leq 1 \}$.

K ES CERRADO Y ACOTADO, $(x^n)_{n=1}^{\infty} \subseteq K$

SIN EMBARGO $x^{n_k} \not\longrightarrow$ EN $C[0,1]$.
PARA CUALQUIER SUBSUCESIÓN.

$\boxed{\text{¿CÓMO SON LOS COMPACTOS DE } C[0,1]\text{?}}$

EL TEOREMA DE ASCOLI-ARZELA.

VAMOS A CARACTERIZAR LOS COMPACTOS DE $C(K)$.

DEF SEA K UN ESPACIO MÉTRICO COMPACTO

·) $C(K) = \{ f\ K \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ CONTINUA} \}$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$

··) $\forall f \in C(K)$ $\quad \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$.

OBSERVACION SI f ES CONTINUA SOBRE K, $|f|$ ESTA ACOTADO Y ADEMAS $\exists x_0 \in K$ CON $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$. (LO CUAL SE PRUEBA USANDO QUE K ES COMPACTO).

PROPOSICION: SEA K ESPACIO METRICO COMPACTO Y SEA $C(K)$.

·) $d\ C(K) \times C(K) \longrightarrow [0, \infty)$.

$\quad f, g \longrightarrow d(f,g) = \|f(x) - g(x)\|_\infty$

ES UNA MÉTRICA SOBRE $C(K)$.

··) $(C(K)\ \|\ \|_\infty)$ ES UN ESPACIO MÉTRICO COMPLETO. (*)

(ES UN ESPACIO MÉTRICO TAL QUE TODA (E.D. ES UN ESPACIO MÉTRICO TAL QUE TODA SUCESIÓN DE CAUCHY $(x_n)_{n=1}^\infty$ ($\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 : n \geq n_0$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$). ES CONVERGENTE).

DEF UN ESPACIO MÉTRICO K ES SEPARABLE SI $\exists (a_n)_{n=1}^\infty \subseteq K$ TAL QUE LA ADHERENCIA DE $(a_n)_{n=1}^\infty$ EN K ES TODO K (E.D. $\overline{\{a_n\}} = K$).

EJEMPLO

·) $[0, 1]$ ES SEPARABLE

• SI $K \subseteq \mathbb{R}^n$, K COMPACTO, ES SEPARABLE

(*) ESENCIAL EN LA PRUEBA DEL TEOREMA DE ASCOLI-ARZELA Y POR TANTO EN LA DE MONTEL

DEF. Sea K un compacto métrico y sea $S \subseteq C(K)$.

a) S se dice uniformemente acotado si existe $M>0$ tal que

$$\sup\{|f(x)| : x \in K\} = \|f\|_\infty \le M \quad \forall f \in S.$$

Es decir S está acotado en $C(K)$.

b) S se dice equicontinuo en $x \in K$ si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ $\forall f \in S$.

Teorema de Ascoli-Arzelá (1883-89).

Sea $S \subseteq C(K)$, K un espacio métrico compacto. Son equivalentes:

a) S es compacto.

b) S es cerrado, acotado y equicontinuo en K (e.d. equicontinuo en todo $x \in K$).

c) S es cerrado, puntualmente acotado en K y equicontinuo en K.

Observación

• Si quitamos en b) y c) la hipótesis de cerrado en a) escribiremos "S es precompacto".

• Haremos la prueba suponiendo K separable (por ejemplo si $K \subseteq \mathbb{R}^n$), lo que simplifica la prueba.

Demostración

Ejercicio: Si $S \subseteq X$, X espacio normado y S es compacto $\Longrightarrow$ S es cerrado y acotado (se prueba como en $\mathbb{R}$; $\|\ \| \; X \to [0,\infty)$ con las propiedades del módulo de $\mathbb{R}$ es una norma).

Veamos que $S \subseteq C(K)$ es precompacto $\Longleftrightarrow$ S es acotado y equicontinuo en K.

PARA HACER LA DEMOSTRACIÓN GENERAL USAREMOS LAS SIGUIENTES CARACTERIZACIONES DE CONJUNTOS COMPACTOS EN ESPACIOS MÉTRICOS COMPLETOS

SEA X UN ESPACIO MÉTRICO COMPLETO Y SEA $K \subseteq X$. SON EQUIVALENTES.

a) PARA TODA SUCESIÓN $(x_n) \subseteq K$ $\exists\, x_{n_k} \xrightarrow{d} x$.

b) PARA TODO RECUBRIMIENTO ABIERTO DE $\overline{K}$ EXISTE UN SUBRECUBRIMIENTO FINITO DE $\overline{K}$ (E.D. SI $\overline{K} \subset \bigcup_{j \in J} A_j$ CON A_j ABIERTO DE X $\exists\, j_1, j_2 \dots j_r$ CON $\overline{K} \subset A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \dots \cup A_{j_r}$, $r \in \mathbb{N}$.

c) $\forall \varepsilon > 0$ EXISTE UN SUBCONJUNTO FINITO $F \subseteq X$ CON $K \subseteq \bigcup_{p \in F} B(p, \varepsilon)$.

$(B(p,\varepsilon) = \{ y \in X : d(p,y) < \varepsilon \}.\ )$

<u>OBSERVACIÓN</u>: b) $\Rightarrow$ c) ES TRIVIAL

c $\Rightarrow$ a) SEA $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq K$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, a_1 \dots a_r \in X$ CON $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} B(a_i, \varepsilon/2)$. ASÍ PARA ALGÚN i_0 $\exists\, x_{n_k} \subseteq B(a_{i_0}, \varepsilon/2)$.

POR UN PROCESO DE DIAGONALIZACIÓN DE CANTOR, SE PUEDE EXTRAER UNA SUBSUCESIÓN DE $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ QUE ES DE CAUCHY Y POR SER X COMPLETO LA SUBSUCESIÓN DE CAUCHY ES CONVERGENTE.

DEMOSTRACIÓN

$S \subseteq C(K)$ PRECOMPACTO $\Rightarrow$ S EQUICONTINUO EN K Y UNIFORMEMENTE ACOTADO.

SI S ES PRECOMPACTO $\Rightarrow$ $\overline{S}$ ES COMPACTO EN $C(K)$. ESPACIO NORMADO, LUEGO

$\overline{S}$ ESTA ACOTADO (*) (EN $\exists M>0$ CON $\|f\|_\infty \leq M$. $\forall f \in S$) LUEGO S ESTA UNIFORMEMENTE ACOTADO.

(*) [SI $\overline{S}$ NO ESTA ACOTADO, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists f_n \in \overline{S}$ Y $x_n \in K$ CON $|f_n(x_n)| > n$.

COMO $\exists f_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ SE SIGUE QUE

$\sup\{|f(x_n)| : n \in \mathbb{N}\} = \infty$, ASI $f \notin C(K)$.]

VEAMOS QUE $\overline{S}$ ES EQUICONTINUO Y POR TANTO S.

SEA $\varepsilon > 0$ Y SEA EL RECUBRIMIENTO DE S

$$\{B(f, \varepsilon/3) : f \in C(K)\}$$

[$B(f, \varepsilon/3) = \{g \in C(K) : \|f-g\| < \varepsilon/3\}$]

EXISTE $f_1 \dots f_r \in C(K)$ DE MODO QUE $\overline{S} \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} B(f_i, \varepsilon/3)$.

COMO CADA f_i ES UNIFORMEMENTE CONTINUA SOBRE K

[E.D. $\forall \varepsilon' > 0$ $\exists \delta' > 0$ TAL QUE $\forall x, y \in K$ CON $d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow \|f_i(x) - f_i(y)\| < \varepsilon$]
PRUEBA COMO EN 1º CURSO.

DADO $\varepsilon/3$ $\exists \delta_i > 0$ TAL QUE SI $d(x_1, x_2) < \delta_i \Rightarrow |f_i(x_1) - f_i(x_2)| < \varepsilon/3$

SEA $\delta = \min\{\delta_i : i = 1, 2, \dots, r\}$ Y SEAN $d(x_1, x_2) < \delta$

ENTONCES VEAMOS QUE $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ $\forall f \in S$.

[YA QUE $\exists i_0$ CON $\|f - f_{i_0}\|_\infty < \varepsilon/3$, Y ASI

$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f_{i_0}(x_1)| + |f_{i_0}(x_1) - f_{i_0}(x_2)| + |f_{i_0}(x_2) - f(x_2)| <$

$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$ c.q.d

DEMOSTRACIÓN $\left\{ \begin{array}{l} \text{- GENERAL PARA K ESP MÉTRICO COMPACTO} \\ \text{- SI K SEPARABLE VER HOJAS 13 y 14: O ATRÁS} \end{array} \right.$

SI S ES EQUICONTINUO SOBRE K Y ACOTADO $\Rightarrow$ S PRECOMPACTO.

OBSERVACIÓN: PARA HACER LA PRUEBA USAREMOS UNA CONDICIÓN MÁS DÉBIL QUE SER S ACOTADO. USAREMOS QUE S ES PUNTUALMENTE ACOTADO (E.D. $\forall x \in K$ $\exists M_x > 0$ CON $|f(x)| \leq M_x$ $\forall f \in S$).

SEA $\varepsilon > 0$ POR SER S EQUICONTINUO EXISTE $\delta > 0$ TAL QUE SI $|x-y| < \delta$ ENTONCES $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ $\forall f \in S$ | EQUICONTINUIDAD UNIFORME

DEM $\forall x \in K$ EXISTE δ_x TAL QUE SI $|x-y| < \delta_x$ $\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ $\forall f \in S$

POR SER K COMPACTO EXISTE $x_1 .. x_r \in K$ TAL QUE

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} B\left(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right).$$

SEA $\delta = \min \left\{ \frac{\delta_{x_i}}{2} : i = 1 .. r \right\} > 0$

AHORA SI $|x-y| < \delta \Rightarrow \exists x_{i_0}$ TAL QUE $x, y \in B(x_{i_0}, \delta_{x_{i_0}})$

Y ASÍ $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_{i_0})| + |f(x_{i_0}) - f(y)| \leq 2\varepsilon$.

POR SER S PUNTUALMENTE ACOTADO, ES ACOTADO

DEM PARA EL $\delta > 0$ ANTERIOR Y SER K COMPACTO EXISTEN $x_1 .. x_r \in K$ CON $K = \bigcup_{i=1}^{r} B(x_i, \delta)$.

Y POR TANTO $\forall x \in B(x_i, \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$ $\forall f \in S$.

Y $\forall i = 1 .. r$.

POR SER PUNTUALMENTE ACOTADO S, $\exists M_1 ... M_r > 0$ CON $|f(x_i)| < M_i$ $\forall f \in S$ Y $i = 1, 2 .. r$.

SEA $M = \max\{M_1, M_2 .. M_r\} + \varepsilon$.

ASÍ $|f(x)| \underset{x \in B(x_i, \delta)}{\leq} |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i)| \leq M$ $\forall x \in K$ y $\forall f \in S$.

LO QUE PRUEBA QUE S ES ACOTADO EN NORMA

8º

SEA $S \subseteq C(K)$ S EQUICONTINUA Y UNIFORMEMENTE ACOTADA EN K CON K SEPARABLE

* DADO $\varepsilon>0$ $\exists\ \delta>0$ TAL QUE SI $x,y \in K$, $d(x,y)<\delta$ ENTONCES $|f(x)-f(y)|<\varepsilon \quad \forall f \in S$ $(*_1)$ (VER 8º ANTERIOR
* SEA $(f_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq S$
* SE $E=\{w_l\}_{l=1}^{\infty} \subseteq K$ DENSO
* COMO $|f_m(z)| \le M$ ESTA ACOTADA EN CADA $z \in K$

$\exists$ SUBSUCESION $f_{m,1}(w_1) \longrightarrow f(w_1)$.

$\exists$ SUBSUCESION DE $f_{m,1}$ $\quad f_{m,2}(w_2) \longrightarrow f(w_2)$

$\vdots$

$\exists$ SUBSUCESION DE $f_{m,n}$ $\quad f_{m,n+1}(w_{n+1}) \longrightarrow f(w_{n+1})$.

SEA LA SUBSUCESION $f_{m,m}$ (PROCESO DE DIAGONALIZACION DE CANTOR).

$\boxed{\text{VEAMOS QUE } (f_{m,m}) \subseteq C(K) \text{ ES DE CAUCHY Y COMO } C(K) \text{ ES COMPLETO} \Rightarrow \exists f \in C(K) \text{ CON } f_{m,m} \xrightarrow{\|\ \|_\infty} f}$

• $(f_{m,m})$ ES DE CAUCHY. PARA EL $\delta>0$ DE ARRIBA

$\exists\ w_{l_1} \dots w_{l_r}$ CON $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{r} B(w_{l_j}, \delta)$ POR SER K COMPACTO

Y ASI $\exists\ N \in \mathbb{N}$ CON $|f_{r,r}(w_{l_j}) - f_{s,s}(w_{l_j})| < \varepsilon$ $(*_2)$

SI $r,s \ge N$ Y $j=1 \dots r$ (YA QUE CADA $\{f_{m,m}(w_{l_j})\}_{m=1}^{\infty}$ ES DE CAUCHY)

ASI SI $z \in K$, $\exists\ w_{l_{j_0}}$ CON $|w_{l_{j_0}} - z| < \delta$ Y ASI

$$|f_{r,r}(z) - f_{s,s}(z)| \le |f_{r,r}(z) - f_{r,r}(w_{l_{j_0}})| + |f_{r,r}(w_{l_{j_0}}) - f_{s,s}(w_{l_{j_0}})| + |f_{s,s}(w_{l_{j_0}}) - f_{s,s}(z)| \le$$

$$\underset{(*_1)\ (*_2)\ (*_1)}{\le \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon} < 3\varepsilon \quad \forall r,s \ge N \text{ Y } \forall z \in K$$

ASI $(f_{m,m})$ ES DE CAUCHY Y COMO $C(K)$ ES COMPLETO, $\exists f \in C(K)$ CON $f_{m,m} \xrightarrow{\|\ \|_\infty} f$

DEMOSTRACION

ASI DADO $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ y $M > 0$ CON

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} B(x_i, \delta). \quad x_1 \dots x_r \in K$$

$$y \quad |f(x)| \le M \quad \forall x \in K \ y \ \forall f \in S.$$

SEA $E = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \le M\}$.

PARA CADA $f \in S$ SE DEFINE

$$e(f) = (f(x_1), f(x_2), \dots f(x_r)) \in E^r.$$

PUESTO QUE E^r ES UN COMPACTO EN $\mathbb{K}^r$ (ES UN CERRADO Y ACOTADO)

EXISTEN $\lambda_1 \dots \lambda_s \in \mathbb{K}^r$ CON

$$E^r \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} B(\lambda_j, \varepsilon).$$

PARA CADA $1 \le j \le s$ ELEGIMOS $f_j \in S$ TAL QUE

$$e(f_j) \in B(\lambda_j, \varepsilon) \quad (\text{SI } B(\lambda_j, \varepsilon) \cap \{e(f) : f \in S\} \neq \emptyset).$$

VEAMOS QUE $S \subseteq \bigcup_{j=1}^{s} B(f_j, 4\varepsilon)$, LO QUE TERMINARIA LA PRUEBA POR LA CARACTERIZACION DE COMPACTOS.

DEM SEA $f \in S$, EXISTE $j \in \{1, 2 \dots s\}$ CON

$$e(f), e(f_j) \in B(\lambda_j, \varepsilon).$$

POR TANTO $|f(x_i) - f_j(x_i)| \le \|e(f) - \lambda_j\|_{\mathbb{K}^r} + \|\lambda_j - e(f_j)\|_{\mathbb{K}^r} \le 2\varepsilon$.

ASI PARA CADA $x \in K$, $x \in B(x_i, \delta)$. PARA ALGUN $i = 1 \dots r$

$$\left.\begin{array}{l} |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon \\ |f_j(x) - f_j(x_i)| < \varepsilon \\ |f(x_i) - f_j(x_i)| < 2\varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f_j(x)| < 4\varepsilon \quad \forall x \in X$$

LUEGO $f \in B(f_j, 4\varepsilon)$.