TEOREMA DE MONTEL

SEA Ω UNA REGIÓN, ABIERTO Y CONEXO, DE $\mathbb{C}$.
SEA $H(\Omega)$ Y SEA $(f_n)_{n\geq 1}^{\infty} \subseteq H(\Omega)$. BUSCAMOS:

UNA NOCIÓN DE CONVERGENCIA ¿$f_n \longrightarrow f$?

UNA NOCIÓN DE COMPACIDAD ¿$\exists f_{n_k} \longrightarrow f \in H(\Omega)$?

LO ANTERIOR SE NECESITA PARA DAR LA PRUEBA DEL TEOREMA DE LA APLICACIÓN DE RIEMANN.

DEF SEA $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, ABIERTO Y CONEXO. $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$.
SE LLAMA FAMILIA NORMAL SI TODA SUCESIÓN $(f_n)_{n\geq 1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ CONTIENE UNA SUBSUCESIÓN $(f_{n_k})_{k\geq 1}^{\infty}$ QUE CONVERGE UNIFORMEMENTE SOBRE LOS COMPACTOS DE Ω. (E.D. $\exists f: \Omega \to \mathbb{C}$ TAL QUE $\forall K \subseteq \Omega$ COMPACTO Y $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0 : k \geq k_0$ ENTONCES $|f_{n_k}(z) - f(z)| < \varepsilon$ $\forall z \in K$).

OBSERVACIÓN SI $(f_n) \subseteq H(\Omega)$ Y $f_n \longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE SOBRE COMPACTOS, ENTONCES $f \in H(\Omega)$ Y $f_n' \longrightarrow f'$ UNIFORMEMENTE SOBRE COMPACTOS. (COMO VIMOS EN EL COROLARIO AL TEOREMA DE MORERA)

TEOREMA DE MONTEL SEA $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$, Ω ABIERTO Y CONEXO. SI $\mathcal{F}$ ESTÁ UNIFORMEMENTE ACOTADA EN CADA SUBCONJUNTO COMPACTO DE Ω, (E.D. $\forall K \subseteq \Omega$ K COMPACTO $\exists M_K > 0$, TAL QUE $|f(z)| \leq M_K$ $\forall f \in \mathcal{F}$ Y $\forall z \in K$). ENTONCES $\mathcal{F}$ ES UNA FAMILIA NORMAL.

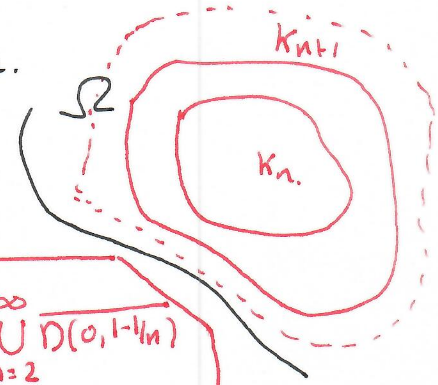
OBSERVACIÓN: EN PRINCIPIO ESTE ENUNCIADO PIDE MENOS CONDICIONES QUE EL TEOREMA DE ASCOLI-ARZELÁ; AHORA PEDIR QUE CADA $f \in \mathcal{F}$ SEA HOLOMORFA ES PEDIR MUCHO; Y DE ELLO SE DEDUCE LA EQUICONTINUIDAD DE $\mathcal{F}$.

DEMOSTRACIÓN

DADO Ω ABIERTO Y CONEXO PODEMOS ENCONTRAR $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ CON a) $K_n \subseteq \Omega$ COMPACTO

b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$

b) $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$ $\forall n \geq 1$.



DEM (ARGUMENTO TÍPICO DE TEORÍA DE LA MEDIDA).

* SEA $V_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| > n\} \cup \bigcup_{a \notin \Omega} D(a, 1/n)$

EJEMPLO: $D(0,1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} D(0, 1 - 1/n)$

V_n ES UN ABIERTO EN $\mathbb{C}$, POR SER UNIÓN DE ABIERTOS. SEA $K_n = \mathbb{C} \setminus V_n$.

K_n CERRADO
y $K_n \subseteq \overline{D(0,n)}$ LUEGO ACOTADO $\Big\}$ ASÍ K_n ES UN COMPACTO DE $\mathbb{C}$ Y CLARAMENTE $K_n \subseteq \Omega$.

* ADEMÁS SI $a \in K_n$ Y TOMO $r = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ SE VE QUE $D(a,r) \subseteq K_{n+1}$ Y ASÍ $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$

SI $b \in B(a,r)$ Y $b \notin K_{n+1} \Rightarrow \begin{cases} |b| > n+1. \\ \exists a' \notin \Omega \text{ CON } |a' - b| < \frac{1}{n+1}. \end{cases}$

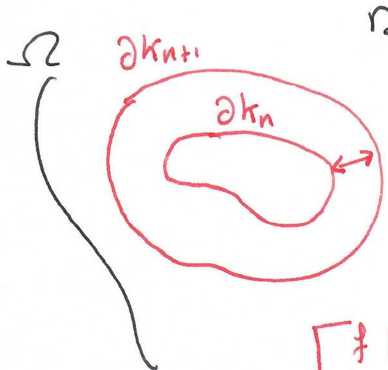
AMBOS CASOS SON INCOMPATIBLES CON $|b - r| < 1/n$

* SI $a \in \Omega$ $\exists \delta > 0$ CON $D(a,\delta) \subseteq \Omega$.
ASÍ SI $n_0 \in \mathbb{N}$ ES TAL QUE $\frac{1}{n_0} < \delta$ Y $n_0 > |a| + 1$.
SE SIGUE QUE $a \notin V_n$ $\forall n \geq n_0$ ASÍ $a \in K_{n_0}$

Y ASÍ $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$.

DEMOSTRACIÓN

Se pueden encontrar núm positivos δ_n con $D(z, 2\delta_n) \subset K_{n+1}$. $\forall z \in K_n$ y $\forall n \in \mathbb{N}$.



$\mathrm{dist}(K_n, \partial K_{n+1}) > 0$

ya que K_n y ∂K_{n+1} son compactos y $\partial K_{n+1} \cap K_n = \emptyset$ $(K_n \subset \mathring{K}_{n+1})$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$z \to f(z) = \mathrm{dis}(z, \partial K_{n+1})$ es continua.

$f|_{K_n}$ alcanza un mínimo, que toma un valor mayor que cero ya que $K_n \cap \partial K_{n+1} = \emptyset$

Veamos que F es equicontinua sobre cada K_n.

Sean z' y $z'' \in K_n$ con $|z' - z''| < \delta_n$

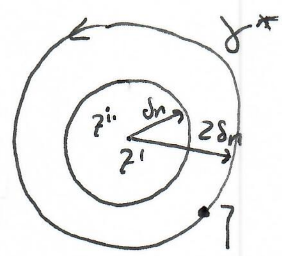
Sea $\gamma = \partial D(z', 2\delta_n)$ orientada positivamente

Como $\dfrac{1}{z - z'} - \dfrac{1}{z - z''} = \dfrac{z' - z''}{(z - z')(z - z'')}$

Usando la fórmula integral de Cauchy para $f \in F$.

$$f(z') - f(z'') = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z'} - \frac{f(z)}{z - z''}\, dz =$$

$$= \frac{z' - z''}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z')(z - z'')}\, dz$$



$|z - z''| > \delta_n$. Así

$$|f(z') - f(z'')| \leq \frac{|z' - z''|}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z)||2\delta_n i e^{it}|}{|2\delta_n e^{it}||z - z''|}\, dt \leq$$

$$\leq \frac{|z' - z''|}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M_{k+1}}{\delta_n} = M_{k+1} \frac{|z' - z''|}{\delta_n} \left(\xrightarrow[z'' \to z']{} 0 \right).$$

$\forall f \in F$ y $\forall z', z'' \in K_n$ y $|z' - z''| < \delta_n$.

Así por el teorema de Ascoli-Arzelá, para cada $(f_m) \subseteq F$

$\exists f \in C(K_n)$ y $f_{m_k} \to f$ uniformemente en K_n.

Se puede no usar.

$\exists f_{m,1} \to f$ uniformemente en K_1 y una subsucesión de esta $f_{m,2} \to f$ uniformemente en K_2 ... etc. Así por un proceso de diagonalización de Cantor $f_{m,m} \to f$ uniformemente sobre cada K_n y por tanto sobre todo K de Ω (ver (*) hoja siguiente)

DEMOSTRACIÓN

{ SIGUE LA PRUEBA SI NO SE USA EL TEOR. DE ASCOLI-ARZELA.

SEA $E \subseteq \Omega$, E NUMERABLE Y TAL QUE $E \cap K_n$ ES DENSO EN K_n $\forall n \in \mathbb{N}$; $E = \{w_i\}_{i=1}^{\infty}$.

CADA $K_n \subseteq \Omega$, ES SEPARABLE ASI $\exists E_n \subseteq K_n$ NUMERABLE Y DENSO. SEA $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$;

$\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists x_{m1} \dots x_{m m_r} \in K$ CON $K : \cup B(x_{mi}, \frac{1}{m})$.

$E_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x_{m1} \dots x_{mr}\}$.

SEA $(f_m) \subseteq F$. COMO $\{f_m(z)\}$ ESTA ACOTADA EN CADA $z \in \Omega$. [$z \in K_{n_0}$ Y ALLI F ESTA UNIFORMEMENTE ACOTADA]

EXISTE UNA SUBSUCESION $f_{m,1}(w_1) \longrightarrow f(w_1)$.

EXISTE UNA SUBSUCESION DE $f_{m,1}$ $f_{m,2}(w_2) \longrightarrow f(w_2)$.

⋮

EXISTE UNA SUBSUCESIÓN DE $f_{m,n}$ $f_{m,n+1}(w_{n+1}) \longrightarrow f(w_{n+1})$

SEA LA SUCESIÓN DIAGONAL $\{f_{m,m}\}$ LA CUAL CONVERGE PUNTUALMENTE SOBRE CADA $w_i \in E$ (PROCESO DE DIAGONALIZACION DE CANTOR).

(*). { VEAMOS QUE $\{f_{m,m}\}$ EN REALIDAD CONVERGE UNIFORMEMENTE EN K_n $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>OBSERVACIÓN</u> Y POR TANTO SOBRE TODO $K \subseteq \Omega$ COMPACTO.

$K \subseteq \Omega$ Y $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathring{K}_n$, EXISTE $n_1 \dots n_r$ CON $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} K_{n_j}$, LUEGO SI HAY CONVERGENCIA UNIFORME SOBRE $K_{n_1} \dots K_{n_r}$ LA HABRÁ SOBRE K.

<u>DEM</u> FIJEMOS K_n Y $\varepsilon > 0$. SEA $\delta = \frac{\delta_n \varepsilon}{M_n + 1}$.

(ASI $\forall f \in F$ Y SI $|z'-z''| < \delta$, $z', z'' \in K_n \Rightarrow |f(z') - f(z'')| < \varepsilon$). (*)$_1$

COMO K_n ES COMPACTO, K_n CONTIENE PUNTOS $z_1 \dots z_p \in E$ (E DENSO EN K_n) CON $K_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} D(z_i, \delta)$

DEMOSTRACIÓN

y $\exists N \in \mathbb{N}$ con

$$|f_{r,r}(z_i) - f_{s,s}(z_i)| < \varepsilon \qquad (*)_2.$$

si $r,s \geq N$ y $i=1,2 \ldots p$ (ya que cada $(f_{m,m}(z_i))$ $i=1 \ldots p$ es de Cauchy, cada $z_i \in E$).

Ahora $\forall z \in K_n$, existe un z_{i_0} con $|z-z_{i_0}|<\delta$

Entonces $|f_{r,r}(z) - f_{s,s}(z)| \leq$

$$\leq |f_{r,r}(z) - f_{r,r}(z_i)| + |f_{r,r}(z_i) - f_{s,s}(z_i)| + |f_{s,s}(z_i) - f_{s,s}(z)| \leq$$

$$\underset{(*)_1}{\leq} \varepsilon + \underset{(*)_2}{\varepsilon} + \underset{(*)_1}{\varepsilon} = 3\varepsilon.$$

Lo que prueba que $(f_{m,m})$ es una sucesión de Cauchy en $C(K_n)$ y por tanto converge uniformemente a su límite puntual f.

c.q.d.