TEOREMA DE LA APLICACIÓN DE RIEMANN

Teorema (de la aplicación de Riemann).

Toda región $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ simplemente conexa, $\Omega \neq \mathbb{C}$, es conformemente equivalente al disco unidad $D(0,1)$.

Dem. Esta prueba se hace en varios pasos. Lo que se hace es lo siguiente:

Sea Ω una región simplemente conexa del plano.

Sea $\Sigma = \{ \psi : \Omega \to D(0,1) : \psi \in H(\Omega) \text{ y } \psi \text{ inyectiva} \}$

$\{$ Si $\psi \in H(\Omega)$ e inyectiva $\Rightarrow \psi'(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$.
y así $\exists f^{-1} \in H(f(\Omega))$.

De lo que se trata de ver es si existe $\psi \in \Sigma$ que sea sobreyectiva.

1º paso Σ es no vacío.

Sea $w_0 \notin \Omega$, como Ω es simplemente conexo.

$f(z) = z - w_0 \in H(\Omega)$. y $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$.

Así existe la raíz cuadrada de f, es decir
$\exists \varphi \in H(\Omega)$ con $\varphi^2(z) = z - w_0$ en Ω.

φ es inyectiva en Ω.

Si $\varphi(z_1) = \varphi(z_2) \Rightarrow z_1 - w_0 = z_2 - w_0 \Rightarrow z_1 = z_2$
$\forall z_1, z_2 \in \Omega$.

Del mismo modo $\forall z_1, z_2 \in \Omega$ $\varphi(z_1) \neq -\varphi(z_2)$.

Como $\varphi \not\equiv ct$, el teorema de la aplicación abierta nos dice que $\varphi(\Omega)$ es abierto.

ASI $\exists a \in f(\Omega)$ Y $0 < r < |a|$. CON

$$D(a,r) \subseteq f(\Omega).$$

EL DISCO $D(-a,r) \cap f(\Omega) = \emptyset$

EN OTRO CASO $\exists z_1 \in \Omega$ CON

$|f(z_1) - (-a)| < r$ Y ASI

$|-f(z_1) - a| < r \Rightarrow -f(z_1) \in D(a,r)$.

POR LO CUAL $\exists z_2 \in \Omega$ CON $f(z_2) = -f(z_1)$

SE DEFINE $\psi = \dfrac{r}{f+a}$ VEAMOS QUE $\psi \in \Sigma$.

1:) SI $z \in \Omega$ $|\psi(z)| = \left|\dfrac{r}{f(z)+a}\right| = \dfrac{r}{|f(z)+a|} < 1$

(DE OTRO MODO $r \geq |f(z)+a| \Rightarrow D(-a,r) \cap f(\Omega) \neq \emptyset$).

2:) COMO $f(z)+a \neq 0$ $\forall z \in \Omega \Rightarrow \psi \in H(\Omega)$.

3:) ψ ES CLARAMENTE INYECTIVA SOBRE Ω POR SERLO f.

$\psi(z_1) = \psi(z_2) \Leftrightarrow \dfrac{r}{f(z_1)+a} = \dfrac{r}{f(z_2)+a} \Leftrightarrow f(z_1) = f(z_2)$.

2: PASO SI $\psi \in \Sigma$ Y $\psi(\Omega) \neq D(0,1)$, ENTONCES PARA $z_0 \in \Omega$ EXISTE $\psi_1 \in \Sigma$ CON $|\psi_1'(z_0)| > |\psi'(z_0)|$.

SUPONGAMOS QUE $\psi \in \Sigma$, $\alpha \in D(0,1)$ Y $\alpha \notin \psi(\Omega)$.

CONSIDEREMOS EL AUTOMORFISMO DEL DISCO $\varphi_\alpha(z) = \dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$.

ASI $\varphi_\alpha \circ \psi \in \Sigma$.

φ_α Y ψ HOLOMORFAS E INYECTIVAS, CON $\varphi_\alpha \circ \psi(\Omega) \subseteq D(0,1)$

POR SER Ω SIMPLEMENTE CONEXO $\exists g \in H(\Omega)$ TAL QUE

$$g^2 = \varphi_\alpha \circ \psi.$$

g ES INYECTIVA, POR SERLO $\varphi_\alpha \circ \psi$, Y ASI $g \in \Sigma$

[SI $|g(z)| \geq 1 \Rightarrow |g^2(z)| \geq 1$ Y $|\varphi_\alpha \circ \psi(z)| < 1$].

SI $\psi_1 = \varphi_{y(z_0)} \circ y$, DE NUEVO $\psi_1 \in \Sigma$.

NOTACIÓN $S(w) = w^2$.

AHORA $\psi(z) = \varphi_{-\alpha} \circ S \circ y(z) =$

$$= \varphi_{-\alpha} \circ S \circ \varphi_{-y(z_0)} \circ \psi_1(z).$$

COMO $\psi_1(z_0) = \varphi_{y(z_0)} \circ y(z_0) = 0$ Y LA REGLA DE LA CADENA DICE QUE

$$\psi'(z_0) = \left(\varphi_{-\alpha} \circ S \circ \varphi_{-y(z_0)}\right)'(\underbrace{\psi_1(z_0)}_{=0}) \cdot \psi_1'(z_0) =$$

$$= \boxed{F'(0) \cdot \psi_1'(z_0).}$$ (*) ($\psi_1'(z_0) \neq 0$ POR SER ψ_1 INYECTIVA)

DONDE $F = \varphi_{-\alpha} \circ S \circ \varphi_{-y(z_0)} : D(0,1) \to D(0,1)$.

Y F NO ES INYECTIVA EN $D(0,1)$. (YA QUE S NO ES INYECTIVA).

EN CONSECUENCIA POR EL LEMA DE SCHWARZ $|F'(0)| < 1$ Y ASÍ $|\psi'(z_0)| < |\psi_1'(z_0)|$ (*).

LEMA (EJERCICIO). SI $f \in H(D(0,1))$ CON $|f(z)| \leq 1 \ \forall z \in D(0,1)$ Y PARA $\alpha, \beta \in D(0,1)$ SE TIENE $f(\alpha) = \beta$ ENTONCES

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{1 - |\beta|^2}{1 - |\alpha|^2}.$$

DEM POR EL LEMA DE SCHWARZ APLICADO A g

$$g(z) = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}(0)$$

$$\Rightarrow \quad |g'(0)| \leq 1 \quad \ldots \text{etc.}$$ (VER CAPÍTULO AUTOMORFISMOS DEL DISCO)

COMO $F(0) = \varphi_{-\alpha} \circ S \circ \varphi_{-y(z_0)}(0) = \varphi_{-\alpha} \circ S(y(z_0)) =$

$$= \varphi_{-\alpha} \circ y^2(z_0) = \varphi_{-\alpha} \circ \varphi_\alpha \circ \psi(z_0) = \psi(z_0).$$

ASÍ $|F'(0)| = 1 - |\psi(z_0)|^2 < 1$ ($|\psi(z_0)| < 1$)

3 PASO FIJADO $z_0 \in \Omega$ SEA

$$\eta = \sup\{|\psi'(z_0)| : \psi \in \Sigma\}$$

(* FINITO COMO SE VERÁ).

EXISTE $h \in \Sigma$ CON $|h'(z_0)| = \eta$.

OBSERVACIÓN SI ESTO ES CIERTO, h TIENE QUE SER SOBREYECTIVA, POR LA DEFINICIÓN DE η Y EL PASO 2. LUEGO

$$h : \Omega \longrightarrow D(0,1), \quad h \in \mathcal{H}(\Omega), \text{ BIYECTIVA}$$

(POR TANTO $f'(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$) Y POR EL TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA $\exists f^{-1} \in \mathcal{H}(D(0,1))$ BIYECTIVA.

COMO $|\psi(z)| < 1 \ \forall \psi \in \Sigma$ Y $\forall z \in \Omega$, Σ ESTÁ UNIFORMEMENTE ACOTADA SOBRE Ω (POR LO TANTO SOBRE SUS COMPACTOS). ASÍ POR EL TEOREMA DE MONTEL Σ ES UNA FAMILIA NORMAL.

LA DEFINICIÓN DE η MUESTRA QUE EXISTE

$$\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma \quad \text{CON} \quad |\psi_n'(z_0)| \longrightarrow \eta.$$

POR SER Σ NORMAL EXISTE UNA SUBSUCESIÓN DE ψ_n, QUE LLAMAREMOS IGUAL,

CON $\psi_n \longrightarrow h$ UNIFORMEMENTE SOBRE LOS COMPACTOS DE Ω

COMO $h \in \mathcal{H}(\Omega)$

Y $\psi_n' \longrightarrow h'$ UNIFORMEMENTE SOBRE LOS COMPACTOS DE Ω

SE SIGUE QUE $|h'(z_0)| = \eta$. (DE PASO PRUEBA QUE η ES FINITO) (*).

4 PASO $h \in \Sigma$

COMO $\Sigma \neq \emptyset$, Y $\eta > 0$ (SI $\psi \in \Sigma$ ES INYECTIVA $\Rightarrow \psi'(z) \neq 0 \ \forall z \in \Omega$).

COMO $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ Y $|h'(z_0)| = \eta \neq 0$ $\quad h \not\equiv c$.

DE LA CONVERGENCIA UNIFORME DE

$\psi_n \longrightarrow h$ SOBRE LOS COMPACTOS DE Ω.

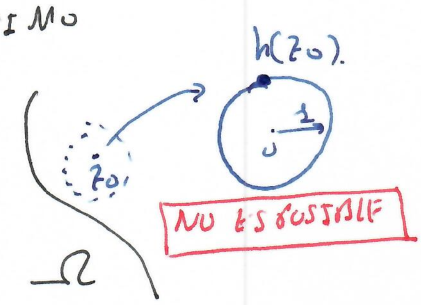
$\Rightarrow h(\Omega) \subseteq \overline{D(0,1)}$

$\left(\left| \|\psi_n(z)\| - \|h(z)\| \right| \le \|\psi_n(z) - h(z)\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right.$

COMO $\|\psi_n(z)\| < 1 \Rightarrow \|h(z)\| \le 1 \quad \forall z \in \Omega \left. \right)$.

AHORA COMO Ω ES ABIERTO Y $h \in H(\Omega)$ POR EL TEOREMA DEL MÓDULO MÁXIMO

$h(\Omega) \subseteq D(0,1)$



SOLO QUE VER QUE h ES **INYECTIVA**

SEA $z_1, z_2 \in \Omega$, $z_1 \neq z_2$. SEA $\alpha = h(z_1)$ Y $\alpha_n = \psi_n(z_1)$, $n \in \mathbb{N}$.

SEA $r>0$ CON $z_1 \notin D(z_2, r)$. Y TAL QUE

$h-\alpha$ NO TIENE CEROS EN $\partial D(z_2,r)$

[PUEDE OCURRIR QUE $h(z_2)=\alpha$, PERO COMO $h \not\equiv cte$ SIN CEROS DE $h-\alpha$].
$\exists r>0$ CON $\overline{D(z_2,r)} \setminus \{z_2\}$.

LAS FUNCIONES $\psi_n - \alpha_n \longrightarrow h-\alpha$ UNIFORMEMENTE EN $\partial \overline{D(z_2,r)}$

Y $\psi_n - \alpha_n$ NO TIENEN CEROS EN $\overline{D(z_2,r)}$ POR SER INYECTIVAS. (VAMOS A APLICAR EL TEOREMA DE ROUCHÉ)

SEA $\varepsilon = \min\{ |h(z)-\alpha| : z \in \partial \overline{D(z_2,r)} \} > 0$

SEA $\varepsilon/2$ $\exists n_0 :$ $n \geq n_0$ $|h(z) - \alpha - \psi_n(z) - \alpha_n| < \varepsilon/2$
$\forall z \in \partial D(z_2,r)$.

LUEGO $\min\{ |\psi_n(z) - \alpha_n| : z \in \partial D(z_2,r) \} \geq \varepsilon/2$ $\forall n \geq n_0$

SEA $\varepsilon/4$ $\exists n_1 > n_0$ CON $\forall n \geq n_1$ $|h(z)-\alpha-\psi_n(z)-\alpha_n| < \varepsilon/4$
$\forall z \in \partial D(z_2,r)$ Y $\forall n \geq n_1$

ASÍ $n \geq n_1$ $|h(z)-\alpha-\psi_n(z)-\alpha_n| < \varepsilon/4 < \varepsilon/2 \leq |\psi_n(z)-\alpha_n|$ $\forall z \in \partial D(z_2,r)$

LUEGO POR EL TEOREMA DE ROUCHÉ $h(z)-\alpha$ NO TIENE CEROS EN $\overline{D(z_2,r)}$

Y ASÍ $h(z_1) \neq h(z_2)$ c.q.d.