LA FUNCION ZETA DE RIEMANN

VAMOS A CONSIDERAR LA FUNCION

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{z}} \qquad \text{CON} \quad \operatorname{Re} z>1.$$

$\left(n^{z} \overset{DEF}{=} e^{z \lg n} \right).$

TEOREMA SEA $\Omega=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z>1\}$ Y SEA $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{z}}$ $z\in\Omega$, ENTONCES

$$f\in H(\Omega).$$

DEM POR DEFINICION

$$n^{z}=e^{z \lg n}\in H(\mathbb{C}), \text{ EN PARTICULAR}$$

$$n^{z}\in H(\Omega).$$

SEA $r>1$ Y SEA z CON $\operatorname{Re} z>r$.

COMO $|n^{z}|=|e^{z\lg n}|=|e^{\operatorname{Re} z \lg n+i \operatorname{Im} z \cdot \lg n}|=$

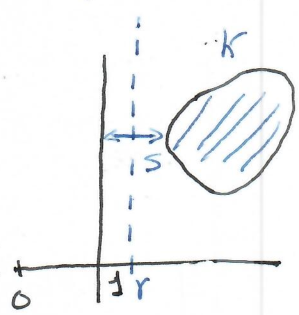
$$=|e^{\operatorname{Re} z \lg n}|=|n^{\operatorname{Re} z}|>n^{r}.$$

ASI $$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^{z}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{r}} \underset{r>1}{<\infty}$$

AHORA POR LA PRUEBA M-WEIERSTRASS $f(z)$ ESTA BIEN DEFINIDA SOBRE Ω Y CONVERGE UNIFORMEMENTE SOBRE $\{z : \operatorname{Re} z\geq r>1\}$.

AHORA SI $K\subseteq\Omega$ COMPACTO, EXISTE $s>0$ CON

$$\operatorname{dist}\{K, \{\operatorname{Re} z=1\}\}=s$$



ASI $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{z}}$ CONVERGE UNIFORMEMENTE SOBRE K Y COMO $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{z}}\in H(\Omega)$, POR EL TEOREMA ANTERIOR SE SIGUE QUE

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{z}}\in H(\{z : \operatorname{Re} z>1\}).$$

DEFINICION: LA FUNCION $\left(\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right)$.

$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ SE CONOCE CON EL

NOMBRE DE FUNCION "Z" DE RIEMANN

LA FUNCION Z DE RIEMANN TIENE RELACIÓN CON LA SUCESIÓN DE NÚMEROS PRIMOS A TRAVÉS DE:

FORMULA DE EULER: SEA $P_1, P_2 \ldots P_n \ldots$ LA SUCESION DE NUMEROS PRIMOS. ENTONCES $\forall z$ CON $\operatorname{Re} z > 1$

$$\frac{1}{f(z)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{P_n^z}\right)$$

DEM EULER PROCEDE DEL SIGUIENTE MODO:

SI $\operatorname{Re} z > 1$

$$f(z)\left(1-2^{-z}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}-\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{-z} \underset{(*)}{=} \sum m^{-z}.$$

DONDE m RECORRE TODOS LOS IMPARES

(*) ESTO ES POSIBLE YA QUE HAY CONVERGENCIA ABSOLUTA EN AMBAS SERIES Y POR TANTO LA SUMA NO DEPENDE DEL ORDEN EN EL CUAL SE SUMEN

AHORA

$$f(z)\left(1-2^{-z}\right)\left(1-3^{-z}\right)=\sum m^{-z}$$

DONDE m RECORRE TODOS LOS ENTEROS QUE $\underline{\underline{NO}}$ SON MULTIPLOS DE 2 Y DE 3.

ASI

$$f(z)\left(1-2^{-z}\right)(1-3)^{-z}\ldots\left(1-P_N^{-z}\right)=\sum m^{-z}$$

DONDE m RECORRE TODOS LOS ENTEROS POSITIVOS QUE NO SON DIVISIBLES POR $2, 3, 5 \ldots P_N$.

ASI $\sum m^{-z} = 1 + P_{N+1}^{-z} + \ldots\ldots$ (**)

TOMANDO LIMITES $\lim_{N\to\infty} f(z)\cdot\prod_{n=1}^{N}\left(1-P_n^{-z}\right)=1.$

— o —

COROLARIO $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \neq 0 \quad \forall z$ con $\operatorname{Re} z > 1$.

DEM

$$f(z) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-z}) = 1 \quad \forall z \text{ con } \operatorname{Re} z > 1.$$

LUEGO $f(z) \neq 0$.

—o—

RIEMANN EMPLEO LA FUNCION Z PARA CALCULAR.

$$\pi(x) \overset{DEF}{=} \text{CANTIDAD DE NÚMEROS PRIMOS MENORES QUE } x.$$

(OBSERVACIÓN LOS PRIMOS QUE DIVIDEN A x SON MENOS QUE $\pi(\sqrt{x})+1$)

TEOREMA DE LOS NÚMEROS PRIMOS: (1896 HADAMARD E INDEPENDIENTEMENTE VALLÉE POUSSIN).

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{dt}{\lg t} \quad \left(\text{E.D. } \left|\pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\lg t}\right| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0\right).$$

—o—

ESTUDIANDO LA FUNCION DE Z SE PUEDE PROBAR QUE:

a) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ SE PUEDE EXTENDER A TODO $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ DE FORMA HOLOMORFA. EN $z=1$ TIENE UN POLO DE RESIDUO 1. (AHLFORS: pag 212 Y SIGUIENTES)

b) $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\} \cup \{-2k : k \in \mathbb{N}\}$ CEROS TRIVIALES

(GAMELIN: pag 370 Y SIGUIENTES)

CONJETURA DE RIEMANN.

TODOS LOS CEROS DE LA FUNCIÓN ZETA NO TRIVIALES ESTÁN SOBRE LA RECTA $\operatorname{Re} z = 1/2$.

(PROBLEMA ABIERTO).

(PROBLEMA NÚMERO 8 DE LA LISTA DE LOS 23 PROBLEMAS DE HILBERT (1900); Y UNO DE LOS POCOS QUE QUEDAN POR RESOLVER)

LAS INTUICIONES DE RIEMANN DEJARON MUCHOS PROBLEMAS ABIERTOS QUE EL NO PUDO PROBAR SATISFACTORIAMENTE, PERO QUE HAN TENIDO TRABAJANDO A LOS MATEMÁTICOS QUE LE PRECEDIERON:

EJEMPLOS:

- TEOREMA DE LOS NÚMEROS PRIMOS
- TEOREMA DE LA APLICACIÓN DE RIEMANN
- CONJETURA DE RIEMANN.

ESTADO DE LA CONJETURA DE RIEMANN:

i) EN 1914 HARDY PROBÓ QUE EXISTEN UNA CANTIDAD INFINITA DE RAÍCES DE ξ SOBRE LA RECTA $\mathrm{Re}\, z = 1/2$

ii) EN 1921 HARDY Y LITTLEWOOD VEN QUE EL NÚMERO DE RAÍCES SOBRE EL SEGMENTO $[1/2, 1/2 + iT]$ ES MENOR QUE KT PARA UNA CONSTANTE K Y T SUFICIENTEMENTE GRANDE

iii) EN 1942 SELBERG PRUEBA QUE EL NÚMERO DE TALES RAÍCES ES AL MENOS

$$K T \log T$$

PARA CIERTA CONSTANTE K Y T SUFICIENTEMENTE GRANDE

(EDWARDS, H.M., "RIEMANN'S ZETA FUNCTION", ACADEMIC PRESS 1974)