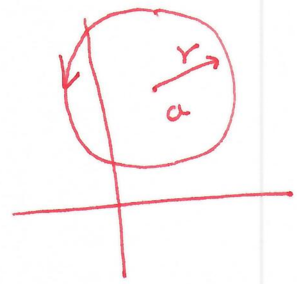
EL TEOREMA DE CAUCHY GLOBAL
LA FUNCIÓN ÍNDICE

SEA $f_n(z) = (z-a)^n$, $a \in \mathbb{C}$ Y $n \in \mathbb{Z}$.

SEA $r > 0$ Y $\gamma_r = \partial D(a,r)$.



$$\int_{\gamma_r} f_n(z)\,dz = 0 \quad \forall n \neq -1$$

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z-a}\,dz = 2\pi i$$

¿CUANTO VALE $\int_{\gamma_r} \frac{1}{z-z_0}\,dz$ $\quad z_0 \notin \gamma_r^* \cup \{a\}$?

ESTA PREGUNTA LA RESPONDEMOS CON LA FUNCIÓN ÍNDICE.

DEFINICIÓN a) SEA γ UN CAMINO CERRADO Y SEA $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ (ABIERTO, NO CONEXO POR EL TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN).

SE DEFINE EL ÍNDICE DE z_0 CON RESPECTO A γ POR:

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$$

b) SEA $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ UN CICLO Y SEA $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$.

SE DEFINE EL ÍNDICE DE z_0 CON RESPECTO A Γ POR

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\gamma_i}(z_0).$$

SEA $a \in \mathbb{C}$, SEAN $0 < r_1 < r_2$ Y SEA $\gamma_2^* = \partial D(a, r_2)$ ORIENTADA EN SENTIDO POSITIVO Y $\gamma_1^* = \partial D(a, r_1)$ ORIENTADA EN SENTIDO NEGATIVO. SABEMOS QUE

$$\int_{\gamma_1^* \cup \gamma_2^*} \frac{1}{z-a}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-a}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-a}\,dz = 0$$

¿$\int_{\gamma_1^* \cup \gamma_2^*} \frac{dz}{z-z_0}$? ESTA CUESTIÓN LA RESUELVE EL TEOREMA DE CAUCHY GLOBAL.

PROPIEDADES DE LA FUNCION INDICE:

TEOREMA. SEA γ UN CAMINO CERRADO Y SEA EL ABIERTO $\Omega = \mathbb{C} - \gamma^*$. LA FUNCIÓN INDICE

$$\begin{aligned} Ind_\gamma \;\; \Omega &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longrightarrow Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \end{aligned}$$

VERIFICA QUE:

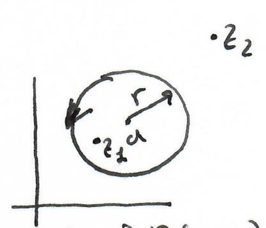
a) SOLO TOMA VALORES ENTEROS.

b) Ind_γ ES CONSTANTE SOBRE CADA COMPONENTE CONEXA DE Ω.

c) Ind_γ SE ANULA SOBRE LA COMPONENTE CONEXA NO ACOTADA DE Ω.

OBSERVACIÓN: DESPUÉS VAMOS A VER LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL ÍNDICE DE UNA CURVA CON RESPECTO A UN PUNTO: ASÍ EL ÍNDICE "INDICA" EN NÚMERO DE VECES QUE γ Ó Γ GIRAN ALREDEDOR DEL PUNTO (EN SENTIDO POSITIVO, MENOS EL NÚMERO DE VECES QUE γ Ó Γ GIRAN EN SENTIDO NEGATIVO).

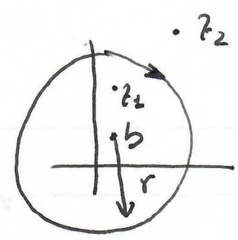
EJEMPLOS: SUPUESTOS a) Y b) CIERTOS.



$\gamma = \partial D(a, r)$

$Ind_\gamma(z_1) = 1$

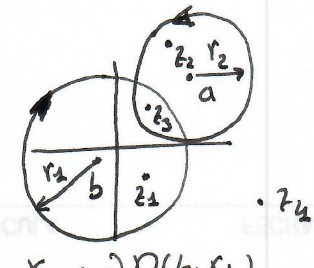
$Ind_\gamma(z_2) = 0$



$\gamma = \partial D(b, r)$.

$Ind_\gamma(z_1) = -1$

$Ind_\gamma(z_2) = 0$



$\gamma_{r_1} = \partial D(b, r_1)$

$\gamma_{r_2} = \partial D(a, r_2)$

$\Gamma = \{\gamma_{r_1}, \gamma_{r_2}\}$

$Ind_\Gamma(z_3) = 0$

— · —

DEM NECESITA

LEMA (VISTO AL ESTUDIAR QUE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS SON ANALÍTICAS

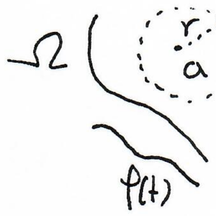
SEA $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ABIERTO Y SEAN $\psi, \varphi\ [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ DOS CURVAS PARAMÉTRICAS CONTINUAS CON

$$\varphi([\alpha,\beta]) \cap \Omega = \emptyset.$$

SE DEFINE $f(z) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\psi(t)}{\varphi(t)-z}\,dt$.

SE TIENE QUE f ES ANALÍTICA EN Ω.

DEM SEA $a \in \Omega$ Y SEA $r>0$ CON $D(a,r) \subset \Omega$.



$$\left.\begin{array}{l} \forall z \in D(a,r) \quad \left|\dfrac{z-a}{\varphi(t)-a}\right| \le \dfrac{|z-a|}{r} < 1 \\ \text{POR TANTO LA SERIE GEOMÉTRICA} \end{array}\right\} (*)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\varphi(t)-a)^{n+1}} = \frac{1}{\varphi(t)-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\varphi(t)-a)^n} =$$

$$= \frac{1}{\varphi(t)-z}$$

ASÍ $\dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\varphi(t)-a)^{n+1}}\,\psi(t) \quad \forall z \in D(a,r).$

CON CONVERGENCIA UNIFORME POR (*) SOBRE $t \in [\alpha,\beta]$.

$$f(z) = \int_\alpha^\beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\varphi(t)-a)^{n+1}}\,\psi(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\alpha^\beta \frac{(z-a)^n}{(\varphi(t)-a)^{n+1}}\,\psi(t)\,dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\int_\alpha^\beta \frac{\psi(t)}{(\varphi(t)-a)^{n+1}}\,dt\right)}_{a_n} (z-a)^n \quad \forall z \in D(a,r)$$

$$\left(= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \forall z \in D(a,r) \right)$$

— o —

DEM (TEOREMA).

COMO γ ES UNA CURVA CERRADA, $\Omega = \mathbb{C} - \gamma^*$ ES UN ABIERTO.

$$\mathrm{Ind}_\gamma \quad \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

CON $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt$$

TOMANDO $\varphi(t) = \gamma'(t)$. (CONTINUA A TROZOS (*)).

Y $f(t) = \gamma(t)$ CON $f([\alpha,\beta]) \cap \Omega = \emptyset$

POR EL LEMA ANTERIOR Ind_γ ES ANALÍTICA EN Ω; ASÍ $\mathrm{Ind}_\gamma \in \mathcal{H}(\Omega)$. ((*) NO AFECTA PARA APLICAR EL LEMA.)

a) VEAMOS QUE $\mathrm{Ind}_\gamma \in \mathbb{Z}$

TENDREMOS EN CUENTA QUE

SI $w \in \mathbb{C}$ Y $e^w = 1 \iff \frac{w}{2\pi i} \in \mathbb{Z}$

$$\left[e^w = e^{\mathrm{Re}\,w}\left(\cos(\mathrm{Im}\,w) + i \,\mathrm{sen}\, \mathrm{Im}\,w\right) = 1 \iff \begin{cases} \mathrm{Re}\,w = 0 \\ \text{y} \\ \mathrm{Im}\,w = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \right]$$

SEA $\phi(t) = e^{\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds}$; $\phi\ [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{C}$

AHORA $\phi'(t) = \phi(t) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}$ Y ASÍ

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \quad (*)$$

[SALVO QUIZÁS EN UNA CANTIDAD FINITA DE PUNTOS "t" DONDE γ' NO ESTÁ DEFINIDA].

ASÍ $\frac{\phi(t)}{\gamma(t) - z} = \frac{\phi'(t)}{\gamma'(t)}$ ES UNA FUNCIÓN CONTINUA EN $[\alpha,\beta]$ CUYA DERIVADA ES NULA A TROZOS.

$$\left(\frac{\phi(t)}{\gamma(t)-z}\right)' = \frac{\phi'(t)(\gamma(t)-z) - \phi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^2} = 0$$

POR (*)

ASÍ POR SER $\frac{\phi(t)}{\gamma(t)-z}$ CONTINUA EN TODO $[\alpha,\beta]$

ES CONSTANTE.

ADEMÁS $\phi(\alpha) = e^0 = 1$, COMO

$$\frac{\phi(\alpha)}{\gamma(\alpha)-z} = \frac{\phi(t)}{\gamma(t)-z} \quad \forall t \in [\alpha,\beta].$$

SE SIGUE QUE $\phi(t) = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(\alpha)-z}$ Y COMO

γ ES UN CAMINO CERRADO $(\gamma(\beta) = \gamma(\alpha))$

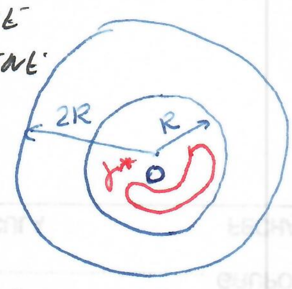
$$\phi(\beta) = 1.$$

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt \in \mathbb{Z}.$$

b) ADEMÁS COMO $\mathrm{Ind}_\gamma \in H(\Omega)$, EN PARTICULAR ES CONTINUA Y POR TANTO CONSTANTE EN CADA COMPONENTE CONEXA DE Ω

[$f\ \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ CONTINUA, SI $C \subset \Omega$ CONEXO $\Rightarrow f(C)$ CONEXO EN $\mathbb{Z}$ $\Rightarrow f(C) \equiv$ cte.].

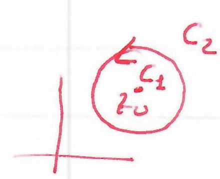
c) γ^* ES COMPACTO EN $\mathbb{C}$, ASÍ $\exists R>0$ CON $\gamma^* \subseteq D(0,R)$.; LUEGO LA COMPONENTE CONEXA NO ACOTADA DE Ω CONTIENE A $\mathbb{C} - D(0,R)$.



SI $z \in \mathbb{C} - D(0,2R)$

$$\left|\mathrm{Ind}_\gamma(z)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \left|\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\right| dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(t)|}{R}\,dt \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$



EJEMPLOS SEA $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ Y SEA $\Omega = \mathbb{C} - \gamma^* = C_1 \cup C_2$

$\mathrm{Ind}_\gamma(z_1) = 1 \quad \forall z_1 \in C_1$

$\mathrm{Ind}_\gamma(z_2) = 0 \quad \forall z_2 \in C_2$

VISION GEOMÉTRICA DE LA FUNCION INDICE

CURVAS DE JORDAN

SEA $\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ UNA FUNCION CONTINUA.

E INYECTIVA EN $[a,b)$ CON $\gamma(a) = \gamma(b)$.

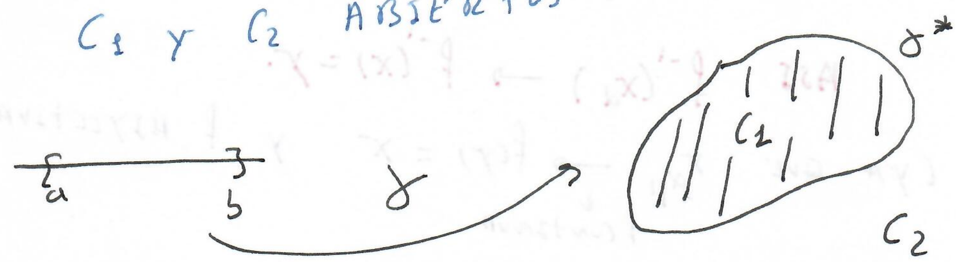
LO QUE SE CONOCE CON EL NOMBRE DE CURVA CERRADA SIMPLE O CURVA DE JORDAN

TEOREMA DE JORDAN:

$\mathbb{C} - \gamma^*$ ES NO CONEXO Y

$$\mathbb{C} - \gamma^* = C_1 \cup C_2$$

C_1 Y C_2 ABIERTOS CONEXOS DISJUNTOS.



OBSERVACIÓN POR SER γ^* COMPACTO CLARAMENTE LA COMPONENTE C_2 ES NO ACOTADA

MANKRES "TOPOLOGIA" (USA EL GRUPO FUNDAMENTAL)

CHRISTEJON and VOXMAN "ASPECTS OF TOPOLOGY" (USA TOPOLOGIA ELEMENTAL DE $\mathbb{C}$)

HAY UNA PRUEBA MAS SENCILLA DE ESTE TEOREMA SUPONIENDO γ DERIVABLE CON CONTINUIDAD

— . —

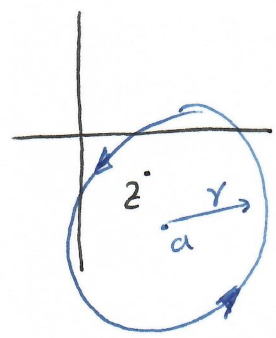
SABEMOS QUE EL ÍNDICE RESPECTO DE UN CAMINO CERRADO γ DE UN PUNTO PERTENECIENTE A LA COMPONENTE CONEXA NO ACOTADA DE $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ [POR TANTO "EXTERIOR" A LA CURVA] ES CERO

VAMOS A TRATAR DE VER QUE EL ÍNDICE DE UN PUNTO "ENCERRADO" POR EL CAMINO γ ES EL NÚMERO DE VUELTAS QUE DA LA CURVA ALREDEDOR DEL PUNTO

EJEMPLOS SI γ ES UNA CIRCUNFERENCIA O UNA UNIÓN DE CIRCUNFERENCIAS, LO ANTERIOR QUEDA CLARO CON LOS EJEMPLOS VISTOS.

SEA $\gamma\ [0, 2n\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longrightarrow a + re^{it}$



SEA $z \in D(a,r)$.

γ RECORRE n VECES $\partial D(a,r)$ EN SENTIDO POSITIVO

$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \mathrm{Ind}_\gamma(a) =$

$z, a \in D(a,r)$ CONEXO.

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2n\pi} \frac{i r e^{it}}{r e^{it}}\, dt = n$$

— · —

LO PRIMERO QUE VEREMOS ES QUE CUALQUIER OTRA "CURVA SIMILAR" A LA CIRCUNFERENCIA TIENE UNA FUNCIÓN ÍNDICE COMO LA DE LA CIRCUNFERENCIA

LEMA SI γ_0 y γ_1 son caminos cerrados con $[0,1]$ como intervalo del parámetro (con la misma orientación) y si para un $\alpha \in \mathbb{C}$ se verifica que

$$|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)| \quad \forall s \in [0,1]$$

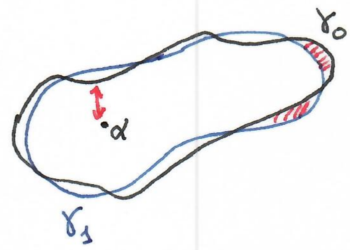
entonces $\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(\alpha)$.

DEM Por hipótesis $\alpha \notin \gamma_0^* \cup \gamma_1^*$

[SI $\gamma_1(s_0) = \alpha$ $\quad |\alpha - \gamma_0(s_0)| < |\alpha - \gamma_0(s_0)|$!!

SI $\gamma_0(s_1) = \alpha$ $\quad 0 \leq |\gamma_1(s_0) - \alpha| < |\alpha - \gamma_0(s_0)| = 0$!!]

Se la curva $\quad \gamma(s) = \dfrac{\gamma_1(s) - \alpha}{\gamma_0(s) - \alpha} \neq 0$



[Como $\gamma' = \dfrac{\gamma_1'(\gamma_0 - \alpha) - \gamma_0'(\gamma_1 - \alpha)}{(\gamma_0(s) - \alpha)^2}$

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \gamma' \cdot \frac{\gamma_0 - \alpha}{\gamma_1 - \alpha} = \frac{\gamma_1'}{\gamma_1 - \alpha} - \frac{\gamma_0'}{\gamma_0 - \alpha}. \;]$$

Así $\quad \dfrac{\gamma'}{\gamma} = \dfrac{\gamma_1'}{\gamma_1 - \alpha} - \dfrac{\gamma_0'}{\gamma_0 - \alpha}$

y por hipótesis y la definición de γ se sigue que

$$|1 - \gamma| = \left|1 - \frac{\gamma_1 - \alpha}{\gamma_0 - \alpha}\right| = \left|\frac{\gamma_0 - \gamma_1}{\gamma_0 - \alpha}\right| < 1.$$

Así $\gamma^* \subset D(1,1)$ y por tanto $\operatorname{Ind}_\gamma(0) = 0$.

$[\, 0 \notin D(1,1) \,]$

$$\text{Así } \; 0 = \operatorname{Ind}_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^*} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_1'}{\gamma_1 - \alpha}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\gamma_0'}{\gamma_0 - \alpha}\,dt =$$

$$= \operatorname{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) - \operatorname{Ind}_{\gamma_0}(\alpha).$$

— o —.