HOMOTOPIAS:

EL SIGUIENTE CONCEPTO TOPOLÓGICO ES ÚTIL EN NUESTRO ESTUDIO

DEF SEAN γ_0 Y γ_1 DOS CURVAS CERRADAS EN UN ESPACIO TOPOLÓGICO X, AMBAS PARAMETRIZADAS SOBRE UN MISMO INTERVALO $[a,b]$ (USAREMOS $[0,1]$ SIN PÉRDIDA DE GENERALIDAD)

DECIMOS QUE γ_0 Y γ_1 SON CURVAS **HOMOTÓPICAS** SI EXISTE:

$$\begin{aligned} H\ [0,1]\times[0,1] &\longrightarrow X \\ (s,t) &\longrightarrow H(s,t) \end{aligned}$$

TAL QUE:

·) H ES CONTINUA

··) $H(s,0)=\gamma_0(s) \quad \forall s\in[0,1]$

···) $H(s,1)=\gamma_1(s) \quad \forall s\in[0,1]$.

····) $H(0,t)=H(1,t) \quad \forall t\in[0,1]$.

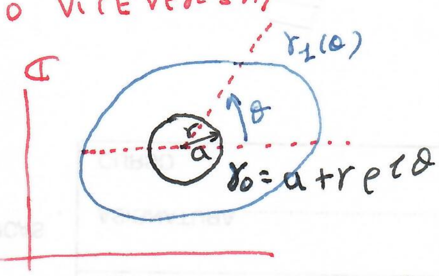
OBSERVACIONES:

·) $\forall t\in[0,1]$ LA CURVA $\gamma_t\ [0,1] \longrightarrow X$, $s \longrightarrow H(s,t)$

ES UNA CURVA CERRADA EN X.

··) CON H ESTAMOS DEFORMANDO γ_0 DE FORMA CONTINUA HASTA TRANSFORMARLA EN γ_1. (O VICEVERSA)

EJEMPLO:



$$\begin{aligned} H: [0,2\pi]\times[0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\theta,t) &\longrightarrow H(\theta,t)= \end{aligned}$$

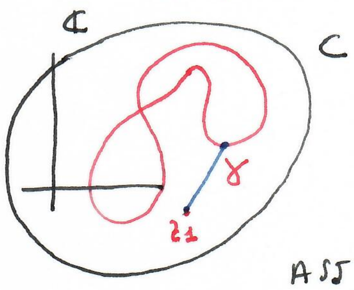
$$=\left(1-\frac{t}{2\pi}\right)(a+re^{i\theta})+\frac{t}{2\pi}\gamma_1(\theta).$$

DEFINICION:

a) SI UN CAMINO CERRADO γ_0 EN $\mathbb{C}$ ES HOMOTÓPICO A UNA APLICACIÓN CONSTANTE γ_1 (ES DECIR γ_1^* ES UN ÚNICO PUNTO). DECIMOS QUE γ_0 ES HOMOTÓPICO A UN PUNTO

b) SI $A \subseteq \mathbb{C}$ ES CONEXO Y SI TODO CAMINO CERRADO γ CON $\gamma^* \subseteq A$ ES HOMOTÓPICO A UN PUNTO, SE DICE QUE A ES SIMPLEMENTE CONEXO

EJEMPLO: SEA $C \subset \mathbb{C}$ UN CONJUNTO CONVEXO ENTONCES C ES SIMPLEMENTE CONEXO



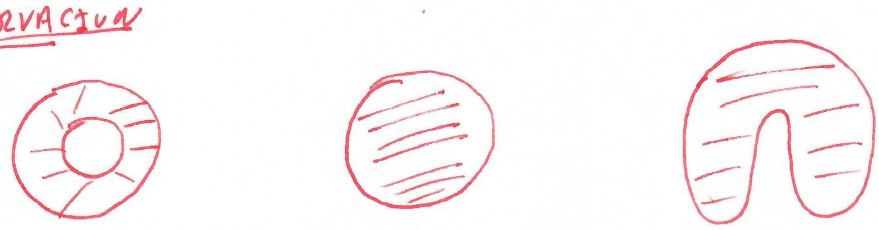
SEA $\gamma^* \subset C$ Y SEA $z_1 \in C$.
COMO PARA TODO $s \in [0,1]$ EL SEGMENTO $[\gamma(s), z_1] \subseteq C$

ASÍ

$$H: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow C$$
$$(s,t) \longrightarrow H(s,t) = (1-t)\gamma(s) + t z_1$$

ES UNA HOMOTOPÍA QUE UNE γ^* CON z_1.

OBSERVACION



CONEXO, NO SIMPLEMENTE CONEXO — CONVEXO — SIMPLEMENTE CONEXO NO CONVEXO.

LA CONEXION SIMPLE DESCARTA LOS CONJUNTOS CON "AGUJEROS". ESTE CONCEPTO SERÁ ÚTIL EN EL TEOREMA DE LA APLICACION DE RIEMANN.

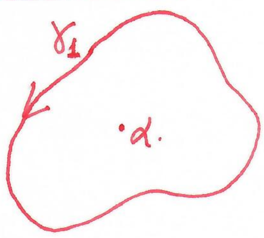
TEOREMA SI γ_0 Y γ_1 SON CAMINOS CERRADOS HOMOTÓPICOS EN UNA REGIÓN $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ (ES DECIR DENTRO DE UN ABIERTO Y CONEXO DE $\mathbb{C}$) Y SI $\alpha \notin \Omega$, ENTONCES

$$Ind_{\gamma_0}(\alpha) = Ind_{\gamma_1}(\alpha).$$

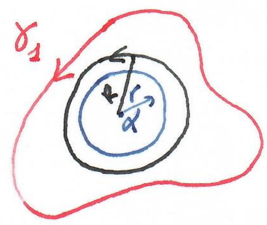
COROLARIO EL MISMO RESULTADO SE OBTIENE SI SUSTITUIMOS CAMINOS CERRADOS POR CICLOS Γ_0, Γ_1.

EJEMPLOS:

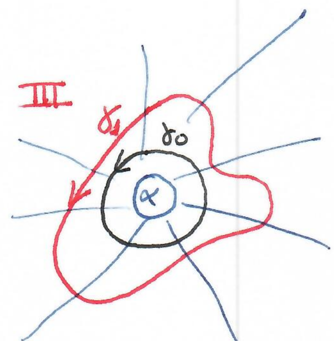
I



II



III



$\Omega = \mathbb{C} \setminus D(\alpha, r)$.

$\gamma_0^*, \gamma_1^* \subseteq \Omega$.

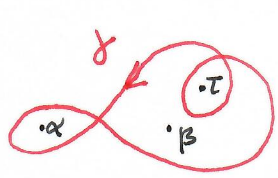
LUEGO $Ind_{\gamma_1}(\alpha) = Ind_{\gamma_0}(\alpha) = 1$

(NUMERO DE VUELTAS EN SENTIDO POSITIVO).

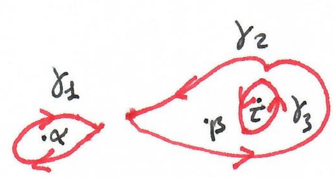
EJEMPLOS:

CON CAMINOS NO SIMPLES SE SIMPLIFICA

I



II



$$\gamma^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \cup \gamma_3^*$$

$$Ind_{\gamma}(\alpha) = Ind_{\gamma_1}(\alpha) = -1$$

$$Ind_{\gamma}(\beta) = Ind_{\gamma_2}(\beta) = 1$$

$$Ind_{\gamma}(\tau) = Ind_{\gamma_2}(\tau) + Ind_{\gamma_3}(\tau) = 2$$

(*) SI SUPONEMOS, ADEMÁS, QUE $\forall t \in [0,1]$ $H(\cdot,t)\ [0,1] \to \Omega$ ES UN CAMINO LA PRUEBA ES MUCHO MÁS SENCILLA

DEM (DEL TEOREMA)

SEA $H^{(*)}\ [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \Omega$ CONTINUA

$$(s,t) \longrightarrow H(s,t)$$

CON $\gamma(s,0) = \gamma_0(s)$, $\gamma(s,1) = \gamma_1(s)$ Y $H(0,t) = H(1,t)\ \forall t \in [0,1]$.

POR SER $[0,1]\times[0,1]$ COMPACTO, $H([0,1]\times[0,1])$ ES COMPACTO EN Ω Y COMO $\alpha \notin \Omega$ (ASÍ

$$\mathrm{dist}(\alpha, H([0,1]\times[0,1])) > 0\ )$$

EXISTE $\varepsilon > 0$ TAL QUE $|\alpha - H(s,t)| > 2\varepsilon\ \ \forall s,t \in [0,1]$.

POR OTRO LADO, POR SER H UNIFORMEMENTE CONTINUA EXISTE $n \in \mathbb{N}$ TAL QUE SI

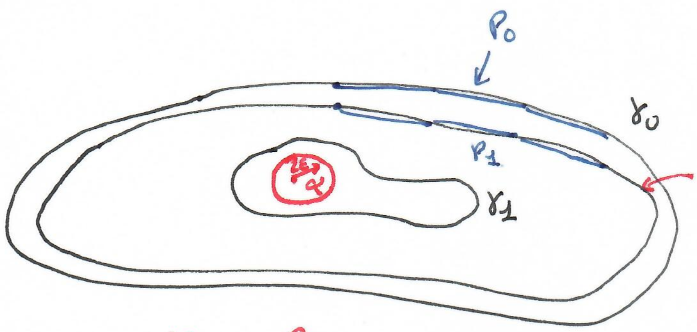
$$|s-s'| + |t-t'| < 1/n.$$

ENTONCES

$$|H(s,t) - H(s',t')| < \varepsilon/3.$$

LA PRUEBA ES MAS CORTA E INTUITIVA SI PENSAMOS QUE $H(\cdot,t)$ ES UNA CAMINO CERRADO, ES DECIR ES DERIVABLE CON CONTINUIDAD A TROZOS EN LA VARIABLE s

VAMOS A TRABAJAR CON POLIGONALES CERRADAS $P_0, P_1, \dots P_n$ ELEGIDAS ADECUADAMENTE, PARA PODER APLICAR EL LEMA PRECEDENTE. (*).



VEREMOS QUE $\gamma_0 \sim P_0$
$\gamma_0 \sim \gamma_{1/n}$ ASÍ VEREMOS QUE $P_0 \sim P_1$ Y
Y $\gamma_{1/n} \sim P_1$ LOS RESPECTIVOS ÍNDICES EN α COINCIDEN. ASÍ NOS IREMOS ACERCANDO A γ_1 PASO A PASO.

(*) SI PARA CADA $t \in [0,1]$ $H(\cdot,t) = \gamma_t$ FUESE DIFERENCIABLE A TROZOS NO HARÍA FALTA CONSTRUIR LAS POLIGONALES

SEA $P_k(s) = H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)(ns+1-j) + H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right)(j-ns)$

SI $j-1 \leq ns \leq j \quad j = 1, 2, \dots, n.$

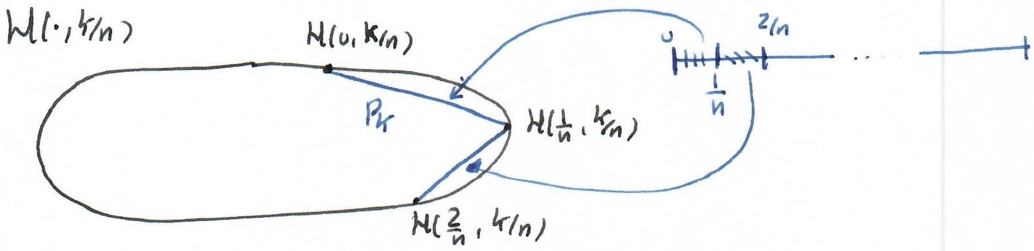
*) $\left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \longrightarrow [j-1, j] \longrightarrow [0,1]$

$s \longrightarrow ns \longrightarrow j-ns$

(ASÍ $(j-ns) + (1-(ns-j)) = 1$)

**) $H(\cdot, \frac{k}{n}) [0,1] \longrightarrow \Omega$

$s \longrightarrow H(s, k/n)$ CAMINO CERRADO.



$H(\cdot, k/n)$ ES UNA CURVA CERRADA CONTINUA, MIENTRAS QUE P_k ES UNA POLIGONAL PRÓXIMA A ELLA, QUE ADEMÁS P_k ES CONTINUAMENTE DIFERENCIABLE A TROZOS..

AHORA $|P_k(s) - H(s, k/n)| \leq$

$\leq \left| H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)(ns+1-j) + H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right)(j-ns) - H\left(s, \frac{k}{n}\right) \right| \leq$

$j-1 \leq ns < j$

$\leq \left| \left(H\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right)(ns+1-j) + \left(H\left(\frac{j-1}{n}, \frac{k}{n}\right) - H\left(s, \frac{k}{n}\right)\right)(j-ns) \right| \leq$

$\leq \quad \varepsilon/3\,(ns+1-j) + \varepsilon/3\,(j-ns) = \varepsilon/3.$

$\frac{j-1}{n} \leq s < j/n.$

ASÍ $\left|\frac{j-1}{n} - s\right| < 1/n$

Y $\left|\frac{j}{n} - s\right| < 1/n$

EN PARTICULAR PARA

$k=0 \quad |\beta_0(s) - \gamma_0(s)| < \varepsilon/3$

Y PARA

$k=n \quad |\beta_n(s) - \gamma_1(s)| < \varepsilon/3$

AHORA $\quad |\alpha - \beta_k(s)| > \varepsilon \quad \forall k = 0,1,2 \dots n$ Y $\forall s \in [0,1]$.

[YA QUE SI $\exists k'$ Y s' CON $|\alpha - \beta_{k'}(s')| < \varepsilon$, ENTONCES

$|H(s', \frac{k'}{n}) - \alpha| \leq |H(s', k'/n) - \beta_{k'}(s')| + |\beta_{k'}(s') - \alpha| \leq$

$\leq \varepsilon/3 + \varepsilon < 2\varepsilon$.

LO CUAL NO ES POSIBLE YA QUE ε VERIFICA

QUE $\quad |\alpha - H(s,t)| > 2\varepsilon \quad \forall t, s \in [0,1]$]

USANDO UN ARGUMENTO SIMILAR SE TIENE QUE:

$|\beta_{k-1}(s) - \beta_k(s)| < \varepsilon \quad \forall k = 1,2 \dots n$ Y $\forall s \in [0,1]$

[YA QUE $|\beta_{k-1}(s) - \beta_k(s)| \leq |\beta_{k-1}(s) - H(s, \frac{k-1}{n})| +$

$+ |H(s, \frac{k-1}{n}) - H(s, \frac{k}{n})| + |H(s, k/n) - \beta_k(s)| \leq$

$\leq 3\,\varepsilon/3 = \varepsilon$.]

AHORA

$|\beta_0(s) - \gamma_0(s)| < \varepsilon < |\alpha - \gamma_0(s)|$ ASI POR EL LEMA

$\operatorname{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\beta_0}(\alpha)$.

COMO $|\beta_0(s) - \beta_1(s)| < \varepsilon < |\alpha - \beta_1(s)|$. ASI POR EL LEMA

$\operatorname{Ind}_{\beta_0}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\beta_1}(\alpha)$.

REPITIENDO EL PROCESO OTRAS n VECES

SE LLEGA A VER QUE

$\operatorname{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\beta_0}(\alpha) = \dots = \operatorname{Ind}_{\beta_k}(\alpha) = \dots = \operatorname{Ind}_{\beta_n}(\alpha) = \operatorname{Ind}_{\gamma_1}(\alpha)!$

Teorema: Supongamos que γ es un camino cerrado del plano $\mathbb{C}$, parametrizado sobre el intervalo $[\alpha, \beta]$. Sean

$$\alpha < u < v < \beta$$

y sean $a, b \in \mathbb{C}$ con $|b| = r > 0$ de modo que:

1º) $\gamma(u) = a - b$ y $\gamma(v) = a + b$

2º) $|\gamma(s) - a| < r \iff s \in (u, v)$

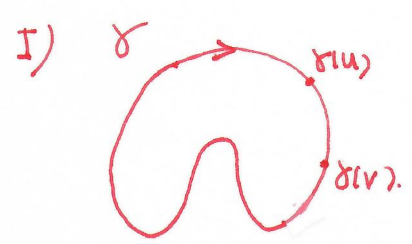
3º) $|\gamma(s) - a| = r \iff s = u$ ó $s = v$

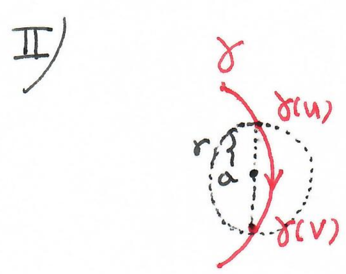
Supongamos además que $D(a,r) - \gamma^*$ sea unión de dos regiones (abiertas y conexas) D_+ y D_- con

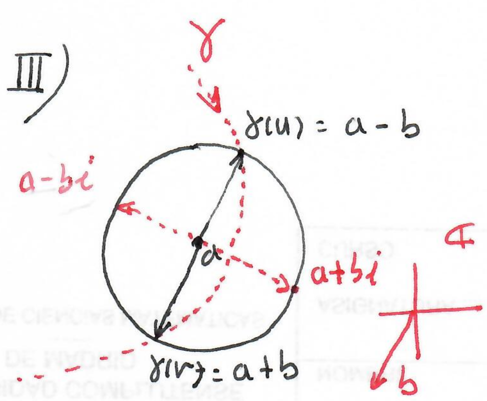
$$a + bi \in \overline{D}_+ \quad y \quad a - bi \in \overline{D}_-$$

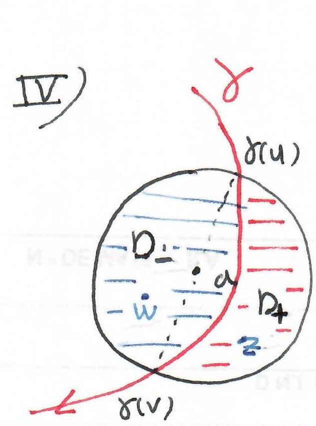
Entonces $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1 + \mathrm{Ind}_\gamma(w)$
si $z \in D_+$ y $w \in D_-$

Dem (Rudin pág 208)









$$\underbrace{\mathrm{Ind}_\gamma(z)}_{\text{¡¡ componente no conexa.}} = 1 + \mathrm{Ind}_\gamma(w)$$