TEOREMA DE CAUCHY GLOBAL

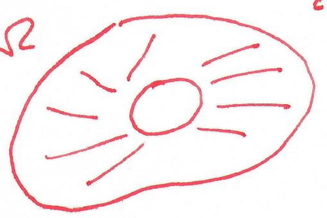
SABEMOS QUE SI $f \in H(\Omega)$ CON Ω ABIERTO CONVEXO Y SI $\gamma^* \subset \Omega$ ES UN CAMINO CERRADO, ENTONCES

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \text{(TEOREMA DE CAUCHY)}$$

— · —

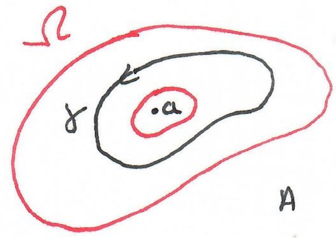
EJEMPLO

I) Ω



EN ESTE ABIERTO CON AGUJERO NO TIENE POR QUE SER CIERTO EL TEOREMA ANTERIOR

II)

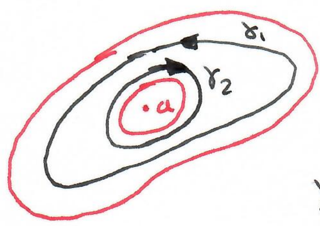


$f(z) = \dfrac{1}{z-a} \in H(\Omega)$

Y γ HOMOTÓPICA A $\partial D(a,r)$

ENTONCES $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,dz = \mathrm{Ind}_\gamma(a)\,2\pi i = 2\pi i$

III)



AHORA SI $f(z) = \dfrac{1}{z-a} \in H(\Omega)$

Y SI $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$

$$\int_\Gamma \frac{1}{z-a}\,dz = \mathrm{Ind}_\Gamma(a)\,2\pi i = 0.$$

TEOREMA DE CAUCHY GLOBAL SEA $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ UN ABIERTO CONEXO Y SEA $f \in H(\Omega)$. SI Γ ES UN CICLO CON $\Gamma^* \subset \Omega$ Y TAL QUE $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \notin \Omega$.

ENTONCES $$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

ADEMÁS $$f(z)\,\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$$

$\forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ (FÓRMULA DE CAUCHY).

DEM:

LEMA: Si $f \in H(\Omega)$ con Ω abierto convexo y

$$g: \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(z,w) \longrightarrow g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{si } z \neq w \\ f'(z) & \text{si } z = w. \end{cases}$$

Entonces g es continua en $\Omega \times \Omega$.

$\underline{\underline{D}}$ Si $z \neq w$ g es continua en (z,w).

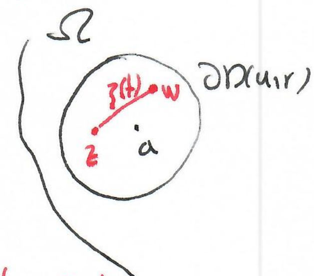
Sea $a \in \Omega$; veamos que g es continua en (a,a).

Sea $\varepsilon > 0$, $\exists r > 0$ tal que $\forall \gamma \in D(a,r) \subseteq \Omega$

$$|f'(\gamma) - f'(a)| < \varepsilon \quad \text{(por ser } f' \text{ continua)}$$

Si $z, w \in D(a,r)$ y si $\gamma(t) = (1-t)z + tw$ $t \in [0,1]$

entonces $\gamma(t) \in D(a,r)$ $\forall t \in [0,1]$



y así

$$g(z,w) - g(a,a) = \int_0^1 [f'(\gamma(t)) - f'(a)]\,dt$$

[ya que $g(a,a) = f'(a) = \int_0^1 f'(a)\,dt$ y

$\gamma'(t) = w - z$, así $\int_0^1 f'(\gamma(t))\,dt = \dfrac{1}{w-z}\int_0^1 f'(\gamma(t))\cdot(w-z)\,dt \overset{\text{regla de Barrow}}{=}$

$$= \frac{1}{w-z}\left[f \circ \gamma\right]_0^1 = \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = g(z,w) \Big]$$

Por tanto $|g(z,w) - g(a,a)| \leq \int_0^1 |f'(\gamma(t)) - f'(a)|\,dt \leq \varepsilon.$

$\forall (z,w) \in D(a,r) \times D(a,r)$.

Lo que prueba la continuidad de g.

—— o ——

Sabemos que $g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{si } z \neq w \\ f'(z) & \text{si } z = w. \end{cases}$ es continua

en $\Omega \times \Omega$. Se define, ahora, la función

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z,w)\, dw.$$

(*) SI VEMOS QUE $h(z) = 0$ $\forall z \in \Omega - \Gamma^*$, ENTONCES

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z) \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{w-z}\, dw$$

Y DESPEJANDO

$$f(z) \cdot \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$ (FÓRMULA DE CAUCHY)

POR OTRO LADO, SEA $a \in \Omega - \Gamma^*$ FIJO Y SEA

$$F(z) := (z-a) f(z) \in H(\Omega).$$

ENTONCES $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(z)}{z-a}\, dz = F(a) \operatorname{Ind}_\Gamma(a) =$

FORMULA DE CAUCHY PARA F.

$= 0$ YA QUE $F(a) = 0$

— · —

$\boxed{(*) \quad h(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega - \Gamma^*}$

$g|_K$ ES UNIFORMEMENTE CONTINUA PARA TODO $K \subseteq \Omega \times \Omega$ COMPACTO.

ASÍ SI $(z_n) \subseteq \Omega$, $z \in \Omega$ Y $z_n \longrightarrow z$

ENTONCES $g(z_n, w) \longrightarrow g(z,w)$ UNIFORMEMENTE SOBRE Γ^* (COMPACTO)

$(\{z_n\} \cup \{z\} \times \Gamma^*)$

ASÍ $\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma g(z_n, w)\, dw = \int_\Gamma g(z,w) dw$

LO QUE PRUEBA QUE $\lim_{n\to\infty} h(z_n) = h(z)$. ASÍ h ES CONTINUA EN Ω

USANDO EL TEOREMA DE MORERA VEAMOS QUE $h \in H(\Omega)$, SEA $a \in \Omega$ Y SEA $D(a,r) \subseteq \Omega$

SEA $\Delta \subseteq D(a,r)$ UN TRIÁNGULO CERRADO

ENTONCES

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta}\left(\int_{\Gamma} g(z,w)\,dw\right)dz \underset{\substack{\text{TEOREMA}\\\text{DE}\\\text{FUBINNI}}}{=} \quad (*)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\int_{\partial\Delta} g(z,w)\,dz\right)dw = 0$$

[SI W ES FIJO $g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z \neq w \\ f'(z) & z = w \end{cases}$ $\quad g(\,,w) \in H(\Omega\setminus\{w\})$ y $g(\,,w)$ CONTINUA EN Ω

Y POR TANTO SATISFACE EL TEOREMA DE CAUCHY PARA TRIÁNGULO EN $D(a,r)$ ABIERTO CONVEXO

(*) SEA $\gamma_1 [a,b] \longrightarrow (\partial\Delta)^*$ PARAMETRIZACIÓN

SEA $\gamma_2 [c,d] \longrightarrow \Gamma^*$ PARAMETRIZACIÓN

$$\int_{\gamma_2}\left(\int_{\gamma_1} g(z,w)\,dz\right)dw = \int_c^d\left(\int_{\gamma_1} g(z,\gamma_2(t))\,dz\right)\cdot\gamma_2'(t) =$$

$$= \int_c^d\left(\int_a^b g(\gamma_1(s),\gamma_2(t))\cdot\gamma_1'(s)\,ds\right)\cdot\gamma_2'(t)\,dt =$$

$$= \int_c^d\left(\int_a^b g(\gamma_1(s),\gamma_2(t))\cdot\gamma_1'(s)\cdot\gamma_2'(t)\,ds\right)dt \underset{\text{T. FUBINNI}}{=}$$

$$= \int_a^b\left(\int_c^d g(\gamma_1(s),\gamma_2(t))\,\gamma_2'(t)\,dt\right)\gamma_1'(s)\,ds =$$

$$= \int_a^b\left(\int_{\gamma_2} g(\gamma_1(s),w)\,dw\right)\gamma_1'(s)\,ds = \int_{\gamma_1}\int_{\gamma_2} g(z,w)\,dw\,dz.$$

ASÍ $\int_{\partial\Delta} h(z)\,dz = 0 \quad \forall \Delta \subseteq D(a,r)$ TRIÁNGULO. POR EL TEOREMA DE MORERA $h \in H(D(a,r))$ y COMO ESTO ES CIERTO $\forall a \in \Omega \Rightarrow h \in H(\Omega)$.

SEA $\Omega_1 = \{ z \in \mathbb{C} - \Gamma^* : \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0 \}$

Ω_1 ES LA UNIÓN DE LAS COMPONENTES CONEXAS DE $\mathbb{C} - \Gamma^*$ DONDE $\mathrm{Ind}_\Gamma = 0$, LUEGO Ω_1 ES ABIERTO (YA QUE ES UNIÓN DE ABIERTOS)

SE DEFINE $h_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw$. $z \in \Omega_1$

COMO Ω_1 ES ABIERTO Y $\Omega_1 \cap \Gamma^* = \emptyset$ SE TIENE QUE $h_1 \in \mathcal{H}(\Omega_1)$. (LEMA PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN ÍNDICE)

ADEMÁS SI $z \in \Omega \cap \Omega_1$, COMO $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$ $(z \notin \Gamma^*)$.

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - \underbrace{\frac{f(z)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w-z}}_{0} = h(z).$$

POR TANTO LA FUNCIÓN $f\ \Omega \cup \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = \begin{cases} h(z) & \text{SI } z \in \Omega \\ h_1(z) & \text{SI } z \in \Omega_1 \end{cases}$$ f ES CONTINUA

Y $f \in \mathcal{H}(\Omega \cup \Omega_1)$.

COMO $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0$ $\forall a \in \mathbb{C} - \Omega$ (POR HIPÓTESIS), SE TIENE QUE $\mathbb{C} \setminus \Omega \subseteq \Omega_1$ Y ASÍ f ES UNA FUNCIÓN ENTERA

ADEMÁS Ω_1 CONTIENE A LA COMPONENTE CONEXA NO ACOTADA DE $\mathbb{C} - \Gamma^*$, ASÍ

$$\lim_{|z| \to \infty} f(z) = \lim_{|z| \to \infty} h_1(z) = 0.$$ (POR DEFINICIÓN DE $h_1(z)$) (*) VER DETALLES

COMO f ESTÁ ACOTADA, POR EL TEOREMA DE LIOUVILLE f ES CONSTANTE $f \equiv c \Rightarrow f \equiv 0$

LUEGO $f(z) = h(z) = 0$ $\forall z \in \Omega$. c.q.d.

OBSERVACIONES

1º] SI Γ_1 Y Γ_2 SON DOS CICLOS CON $\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(\alpha)$ $\forall \alpha \notin \Omega$, ENTONCES

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_1 - \Gamma_2}(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \notin \Omega.$$

Y ASÍ $$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1 - \Gamma_2} f(z)\,dz \quad \forall f \in H(\Omega).$$

Y POR TANTO
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

2º] SI γ ES UN CAMINO CERRADO EN UN ABIERTO CONVEXO Ω, ENTONCES $\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$ $\forall z \notin \Omega$.

[CLARO LA COMPONENTE CONEXA NO ACOTADA DE $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ CONTIENE A $\mathbb{C} \setminus \Omega$ POR SER Ω CONVEXO] (*) VER DETRÁS

ASÍ EL TEOREMA DE CAUCHY GLOBAL GENERALIZA EL TEOREMA DE CAUCHY PARA ABIERTOS CONVEXOS.

TEOREMA (DE CAUCHY PARA ABIERTOS SIMPLEMENTE CONEXOS).
SEA $f \in H(\Omega)$ CON Ω UN ABIERTO SIMPLEMENTE CONEXO Y SEA γ UN CAMINO CERRADO CON $\gamma^* \subseteq \Omega$. ENTONCES
$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

DEM. VEAMOS QUE Ω SIMPLEMENTE CONEXO $\Rightarrow$
$$\mathrm{Ind}_\gamma(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega \text{ Y}$$
DESPUÉS SE APLICA EL TEOREMA DE CAUCHY GLOBAL.

SEA $\gamma^* \subset \Omega$ CURVA CERRADA

Y SEAN $C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_n = \mathbb{C} - \gamma^*$

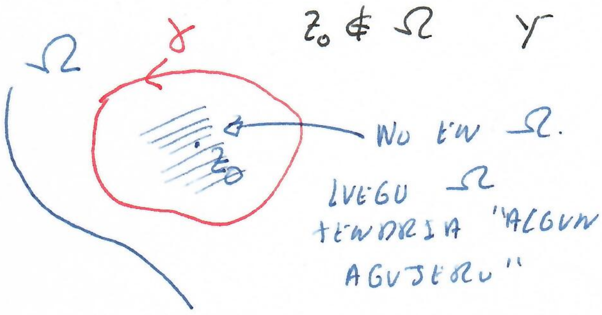
LAS COMPONENTES CONEXAS (ABIERTAS) DE $\mathbb{C} - \gamma^*$

SI C_1 ES LA COMPONENTE NO ACOTADA

ENTONCES $\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0 \quad \forall z \in C_1$

VEAMOS QUE NO EXISTE $z_0 \in C_j \quad j \neq 1$ CON

$z_0 \notin \Omega$ Y $\operatorname{Ind}_\gamma(z_0) \neq 0$



POR SER Ω SIMPLEMENTE CONEXO $\exists H: [0,1]\times[0,1] \to \Omega$

CON $H(s,0) = \gamma(s)$

$H(s,1) \equiv \alpha \in \Omega$.

Y $H(0,t) = H(1,t) \quad t \in [0,1]$

ASI POR HABER HOMOTOPIA ENTRE γ Y $H(\cdot,1) \equiv \alpha$

Y COMO $z_0 \notin \Omega$ SE SIGUE QUE

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z_0) = \operatorname{Ind}_{H(\cdot,1)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{H(\cdot,1)} \frac{1}{z - z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\overbrace{H'(s,1)}^{=0}}{\alpha - z_0}\,ds = 0$$

OBSERVACION MAS ADELANTE VEREMOS QUE ESTA PROPIEDAD CARACTERIZA A LOS CONJUNTOS SIMPLEMENTE CONEXOS.