ESTUDIO DE SINGULARIDADES

LAS FUNCIONES $f(z)=(z-a)^n$ SON ENTERAS

SIN EMBARGO $\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-a)^n}$ TIENE UNA DISCONTINUIDAD EN $z=a$. SI $n\neq 1$

$$\int_{\partial D(a,r)} \frac{1}{(z-a)^n}\,dz=0 \quad \text{[YA QUE TIENE UNA PRIMITIVA]}$$

LA TEORIA INTEGRAL DE CAUCHY PERMITE ESTUDIAR LAS SINGULARIDADES DE FUNCIONES HOLOMORFAS SALVO QUIZAS EN UNA "CANTIDAD PEQUEÑA" DE PUNTOS (FUNCIONES MEROMORFAS)

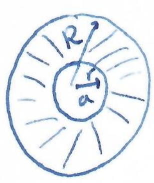
ANTES NECESITAMOS EL CONCEPTO DE:

SERIES DE LAURENT:

EJEMPLO $f(z)=\frac{1}{z-a}$; $f\notin H(D(a,r))$

PERO $f\in H(D(a,R)\setminus\overline{D(a,r)})$; $0<r<R$.

•) f NO CABE QUE SE PUEDA ESCRIBIR COMO UNA SERIE DE TAYLOR CENTRADA EN a



••) AHORA $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ CON $a_n=0$ SI $n\neq -1$ Y $a_{-1}=1$

DEFINICION UNA SERIE FORMAL

$$A(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n \quad \text{CON } a_n, a\in\mathbb{C} \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

SE LLAMA SERIE DE LAURENT CENTRADA EN a.

NOTACIÓN:

$A^+(z)=\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ PARTE REGULAR DE LA SERIE

$A^-(z)=\sum_{n<0} a_n(z-a)^n$ PARTE PRINCIPAL DE LA SERIE

$$\ell_1(A)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

$$\ell_2(A)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{-n-1}}{a_{-n}}\right|$$

PROPOSICION: SEA $A(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ UNA SERIE DE LAURENT. ENTONCES

1:] LA SERIE NUMERICA $A^-(z)=\sum_{n<0} a_n (z-a)^n$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE Y UNIFORMEMENTE PARA $|z-a|\geq r > \rho_2(A)$ Y DIVERGE SI $|z-a|<\rho_2(A)$.

LA FUNCION $A^-(z)\in H(\mathbb{C}\setminus\overline{D(a,\rho_2(A))})$

Y $(A^-(z))'=\sum_{n<0} n a_n (z-a)^{n-1}$

2:] SI $\rho_2(A)<\rho_1(A)$, ENTONCES LA SERIE $A(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ CONVERGE ABSOLUTA Y UNIFORMEMENTE EN TODO EL ANILLO

$K=\{z\in\mathbb{C} : \rho_2(A)<r_2\leq |z-a|\leq r_1<\rho_1(A)\}$

$\forall$ r_2 Y r_1 EN LAS CONDICIONES

$\rho_2(A)<r_2<r_1<\rho_1(A)$.

LA FUNCION $A(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n\in H(\Omega)$

CON $\Omega:\{z\in\mathbb{C} : \rho_2(A)<|z-a|<\rho_1(A)\}$.

Y $A'(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\cdot a_n (z-a)^{n-1}$ $\forall z\in\Omega$.

DEM 1:] APLICAR EL CRITERIO DEL COCIENTE (COMO SE HACE EN LAS SERIES DE POTENCIAS PARA CALCULAR EL RADIO DE CONVERGENCIA)

$A^-(z)=f\circ g(z)$ DONDE $\begin{cases} g(z)=\frac{1}{z-a}\in H(\mathbb{C}\setminus\overline{D(a,\rho_2(A))}) \\ f(z)=\sum_{n>0} a_{-n} z^n \in H(D(0,\frac{1}{\rho_2(A)})) \end{cases}$

ASI $A^-(z)\in H(\mathbb{C}\setminus\overline{D(a,\rho_2(A))})$ Y

$(A^-(z))'=f'(g(z))\cdot g'(z)=\sum_{n>0} n a_{-n}\frac{1}{(z-a)^{n-1}}\cdot\frac{-1}{(z-a)^2}=\sum_{n<0} n a_n (z-a)^{n-1}$

2:] $A(z)=A^-(z)+A^+(z)$ USAR 1:] Y LO ANÁLOGO QUE OCURRE PARA LA SERIE DE POTENCIAS $A^+(z)$

DEFINICIÓN SEA $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \rho_2 < |z-a| < \rho_1\}$.

Y SEA $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. DECIMOS QUE f ES DESARROLLABLE EN SERIE DE LAURENT EN EL ANILLO Ω SI EXISTE UNA SERIE DE LAURENT $A(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ CON

$$\rho_2(A) \leq \rho_2 < \rho_1 \leq \rho_1(A)$$

TAL QUE $$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n \quad \forall z \in \Omega.$$

LLAMAREMOS A $A^+(z)$ LA PARTE REGULAR DE f EN Ω

" A $A^-(z)$ LA " PRINCIPAL DE f EN Ω

PROPOSICIÓN: SEA UN ANILLO $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \rho_2 < |z-a| < \rho_1\}$.

Y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ DESARROLLABLE EN SERIE DE LAURENT EN Ω, e.d $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$. $\forall z \in \Omega$, ENTONCES $f \in H(\Omega)$. Y EL DESARROLLO ANTERIOR ES ÚNICO. EN PARTICULAR SI $\rho_2 < r < \rho_1$ Y $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Y $M(r) = \max \{|f(z)| : |z-a| = r\}$ SE TIENE:

1) $$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

2) $$|a_k| \leq \frac{M(r)}{r^k}.$$

OBSERVACIÓN

1) ES LA MISMA FÓRMULA QUE SE OBTENÍA EN EL RESULTADO DE ANALITICIDAD DE LAS FUNCIONES HOLOMORFAS

2) RESULTADO ANÁLOGO AL QUE DA LAS DESIGUALDADES DE CAUCHY.

DEM

CADA FUNCIÓN $f_n(z) = a_n(z-a)^n \in H(\Omega)$ Y $A(z)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE A f EN Ω POR TANTO $f \in H(\Omega)$.

AHORA PARA $\rho_1 < r < \rho_2$ LAS SERIES

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n \quad Y \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \frac{(z-a)^n}{(z-a)^{k+1}}$$

CONVERGEN UNIFORMEMENTE Y ABSOLUTAMENTE A LO LARGO DE

$$\gamma(t) = a + re^{it}$$

ASÍ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^{n-k-1}\,dz =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma a_n(z-a)^{n-k-1}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{a_k}{z-a}\,dz = a_k \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(a) = a_k$$

EL RESTO DE INTEGRALES VALE POR TENER CADA FUNCIÓN UNA PRIMITIVA

POR OTRO LADO

$$|a_k| \le \left|\frac{1}{2\pi i}\right| \left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f\circ\gamma(t)|\,|rie^{it}|}{|re^{it}|^{k+1}}\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{M(r)}{r^k}\,dt = \frac{M(r)}{r^k}$$

c.q.d.

TEOREMA Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \rho_2 < |z-a| < \rho_1\}$ un anillo y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Son equivalentes:

a) f es desarrollable en serie de Laurent en Ω

b) $f \in H(\Omega)$

DEM

$a \Rightarrow b)$ es la proposición anterior

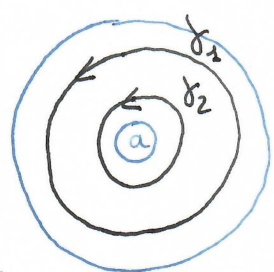
$b) \Rightarrow a)$ [Siguiendo los pasos del teorema de analiticidad; ahora usando el teorema de Cauchy global].

Sean $\rho_2 < r_2' < r_2 < r_1 < r_1' < \rho_1$ y sean

las circunferencias

I)

II)



$\gamma_1 = a + r_1' e^{it}$ y $\gamma_2 = a + r_2' e^{it}$ $t \in [0,1]$

Sea el ciclo $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ | Cambiamos de orientación γ_2

Así es claro que $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \notin \Omega$.

Podemos aplicar la fórmula global de Cauchy

y
$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$\forall z \in \Omega$.

Vamos a fijar z con $r_2 \leq |z-a| \leq r_1$.

En este caso $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) - \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z) = 1 - 0 = 1$.

AHORA

I] SI $|\zeta-a|=r_1'$, COMO $|z-a|\le r_1<r_1'$

PODEMOS ESCRIBIR.

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\,\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

SUMA DE UNA SERIE GEOMETRICA

SERIE QUE CONVERGE ABSOLUTAMENTE Y UNIFORMEMENTE EN $|\zeta-a|=r_1'$ ASI

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{f(\zeta)\,(z-a)^n}{|\zeta-a|^{n+1}}\right)d\zeta=$$

$$=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{|\zeta-a|^{n+1}}\,d\zeta\right)(z-a)^n=\sum_{n\geq 0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

CON $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{|\zeta-a|^{n+1}}\,d\zeta.$

II] SEA $|\zeta-a|=r_2'$ COMO $|z-a|\geq r_2>r_2'$

$$\frac{1}{\zeta-z}=-\frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}}=-\sum_{n<0}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

LA SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^n}=\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}}$$

ESTA SERIE CONVERGE ABSOLUTAMENTE Y UNIFORMEMENTE EN $|\zeta-a|=r_2'$ Y POR TANTO

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\left(\sum_{n<0}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n\right)d\zeta=$$

$$=\sum_{n<0}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta\right](z-a)^n.$$

ASI $f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-a)^n$ PARA $|z-a|\in[r_2,r_1]$.

POR LA UNICIDAD DEL DESARROLLO DE LAURENT SE TIENE EL RESULTADO EN TODO Ω.