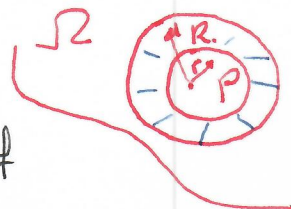


CLASIFICACIÓN DE SINGULARIDADES

DEF SEA Ω UN ABIERTO DE \mathbb{C} Y SEA $p \in \Omega$. (ASI $\Omega - \{p\}$ ES UN ABIERTO). SI $f \in H(\Omega - \{p\})$.

DECIMOS QUE p ES UNA SINGULARIDAD AISLADA DE f



¿CÓMO SERÁ EL COMPORTAMIENTO DE f CERCA DE p ?

ATENCIÓN A LOS LÍMITES:

SEA p SINGULARIDAD AISLADA DE f ENTONCES
 a) EXISTE $\lim_{z \rightarrow p} f(z)$. Y DECIMOS QUE p ES UNA DISCONTINUIDAD EVITABLE

o BIEN

b) $\lim_{z \rightarrow p} |f(z)| = \infty$ Y DECIMOS QUE p ES UN POLU DE f

o BIEN

c) NO OCURRE a) NI b) Y DECIMOS QUE p ES UNA DISCONTINUIDAD ESENCIAL.

ATENCIÓN A LA SERIE DE LAURENT:

SI $f \in H(\Omega - \{p\})$ CON Ω ABIERTO Y $p \in \Omega$.
 EXISTE UNA SERIE DE LAURENT

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n = f(z) \quad \forall z \in [D(a, R) - \overline{D(a, r)}] \subseteq \Omega.$$

PUEDE OCURRIR

a) $a_n = 0, \forall n < 0$ Y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$

o BIEN

b) $\exists n_0 < 0$ CON $a_{n_0} \neq 0$ Y $a_n = 0$ PARA TODO $n < n_0$

$$f(z) = \frac{a_{n_0}}{(z-a)^{n_0}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

o BIEN

c) $\forall n_0 < 0 \exists n < n_0$ CON $a_n \neq 0$.

VEAMOS QUE LAS DOS TRILAS DE POSIBILIDADES SON SENCILLAS

LEMA SI $f \in H(\Omega - \{p\})$ $\rightarrow \Omega$ ABIERTO Y $p \in \Omega$.
 ENTONCES SON EQUIVALENTES.

a) EXISTE $\lim_{z \rightarrow p} f(z)$

b) $|f|$ ESTA ACOTADA EN UN ENTORNO DE p

(P.D. $\exists M > 0$ Y $\exists \delta > 0$ CON $|f(z)| < M \forall z \in D(p, \delta)$) (PRACTICA)

DEM a) \Rightarrow b) ES OBVIO POR CONTINUIDAD.

b) \Rightarrow a) SEA $h(z) = (z-p)^2 f(z) \in H(\Omega - \{p\})$.

ADEMAS $\lim_{z \rightarrow p} h(z) = (z-p)^2 f(z) = 0$

$$|(z-p)^2 f(z)| \leq M |z-p|^2 \xrightarrow{z \rightarrow p} 0$$

POR TANTO

$$\lim_{z \rightarrow p} \frac{h(z) - h(p)}{z-p} = \lim_{z \rightarrow p} (z-p) f(z) = 0$$

ASI $h(z) \in H(\Omega)$ CON $h'(p) = 0$ Y $h(p) = 0$

$$\text{ASI } h(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{(k)}(p)}{k!} (z-p)^k$$

$$\text{Y POR TANTO } f(z) = \frac{h(z)}{(z-p)^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{(k)}(p)}{k!} (z-p)^{k-2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k+2)}(p)}{(k+2)!} (z-p)^k \quad \forall z \in D(p, \delta) - \{p\}$$

$$\text{POR TANTO } \lim_{z \rightarrow p} f(z) = \frac{h''(p)}{2}$$

TEOREMA (RIEMANN). SEA $f \in H(\Omega - \{p\})$ $\rightarrow \Omega$ ABIERTO
 Y $p \in \Omega$. SI p ES UNA SINGULARIDAD EVITABLE
 Y SI SE DEFINE $f(p) = \lim_{z \rightarrow p} f(z)$ ENTONCES
 $f \in H(\Omega)$.

OBSERVACION: LO CUAL ES EQUIVALENTE A QUE f
 TENGA UN DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR CENTRADA
 EN p E.N. $\exists r > 0$ CON $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n \quad \forall z \in D(p, r)$

DEM SEA $f \in H(\Omega - \{p\})$ Y p ES CONTINUA EN Ω , USANDO EL TEOREMA DE
 MORERA, JUNTO CON EL TEOREMA DE CAUCHY PARA TANTO BLOCS $\Rightarrow f \in H(\Omega)$

OBSERVACION SI $f \in H(\Omega - \{p\})$ TIENE UNA

RESIDUALIDAD EVITABLE EN p Y SI

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-p)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-p)^n} + g(z) \quad \text{CON } g \text{ HOLomorFA.}$$

SI $\exists n_0: \forall n > n_0 \quad a_{-n} = 0$, ENTUNCES

$$\lim_{z \rightarrow p} \left| \sum_{n=1}^{n_0} \frac{a_{-n}}{(z-p)^n} + g(z) \right| \begin{cases} \text{ESTA ACOTADO} \\ \text{SI } a_{-n} = 0 \quad \forall n \\ \infty \quad \text{SI } \exists a_{-n_1} \neq 0. \end{cases}$$

DEFINICION a) SEA $f \in H(\Omega)$ Y SEA $a \in \Omega$.

CON $f(a) = 0$. SE DICE QUE f TIENE EN " a " UN CERO DE ORDEN ^(*) $m \geq 1$ SI

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k \quad \text{CON } f^{(m)}(a) \neq 0.$$

b) SEA $f \in H(\Omega - \{p\})$. CON p UN PUNTO DE f (E.N. $\lim_{z \rightarrow p} |f(z)| = \infty$). COMO $\frac{1}{f} = g(z)$

Y $g(p) = 0$, ES TAL QUE $g \in H(D(p, r))$ PARA ALGUN $r > 0$, SE DICE QUE p ES UN PUNTO DE ORDEN $m \geq 1$ SI p ES UN CERO DE ORDEN m DE $\frac{1}{f}$.

PROPOSICION: SEA Ω ABIERTO DE \mathbb{C} Y $p \in \Omega$. CON

$f \in H(\Omega - \{p\})$. SON EQUIVALENTES:

a) f TIENE UN PUNTO EN p DE ORDEN m .

b) $\frac{1}{f}$ TIENE UN CERO EN p DE ORDEN m .

c) $g(z) = (z-p)^m f(z)$ TIENE UNA SINGULARIDAD EVITABLE EN p Y $g(p) = \lim_{z \rightarrow p} g(z) \neq 0$.

(*) o MULTIPLICIDAD.

DEM

a) \Rightarrow b) POR DEFINICION DE ORDEN DE UN PULO

b) \Rightarrow c) SI $\frac{1}{f(z)}$ TIENE UN CERU DE ORDEN m EN p

$$h(z) = \frac{1}{f(z)} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{h^{(k)}(p)}{k!} (z-p)^k =$$

$$= (z-p)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k+m)}(p)}{(k+m)!} (z-p)^k \quad \text{CON } \frac{h^{(m)}(p)}{m!} \neq 0$$

ASI $\frac{1}{f(z)(z-p)^m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k+m)}(p)}{(k+m)!} (z-p)^k \in H(D(p, r'))$

y $\lim_{z \rightarrow p} \frac{1}{f(z)(z-p)^m} = \frac{h^{(m)}(p)}{m!} \neq 0$

LUEGO $g(z) = f(z)(z-p)^m \in H(\Omega)$ y $g(p) \neq 0$.

c) \Rightarrow a) SI $g \in H(\Omega)$ CON $g(p) \neq 0$

ENTONCES $|f(z)| = \left| \frac{g(z)}{(z-p)^m} \right| \xrightarrow{z \rightarrow p} \infty$

LUEGO f TIENE UN PULO EN p . Y AFIRMAS

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-p)^m}{g(z)} = (z-p)^m \frac{1}{g(z)} \quad \text{CON } \frac{1}{g(z)} \in H(D(p, r'))$$

$g(p) \neq 0$

CLARAMENTE $\frac{1}{f}$ TIENE UN CERU DE ORDEN m EN p

EJEMPLOS:

1) $f(z) = \frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}$ LAS RAICES DE $b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0$

SUN CANONICAS A SER PULO DE LA FUNCION

2) $f(z) = \sin \frac{z}{2}$ $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ ASI

$\sin \frac{z}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{2k+1} (2k+1)!}$ LUEGO $z=0$ ESTE GUMENAS ES UN CERU.



TEOREMA (DE CASORATI - WEIERSTRASS).

SI $f \in H(\Omega - \{p\})$ CON Ω ABERTO Y p UNA SINGULARIDAD ESENCIAL DE f ENTONCES $\forall \epsilon > 0$ SE TIENE QUE $f(D(p, \epsilon) - \{p\})$ ES DENSO EN \mathbb{C} (E.N. $\overline{f(D(p, \epsilon) - \{p\})} = \mathbb{C}$).

DEM SI EXISTE $\epsilon > 0$ CON $D(p, \epsilon) \subseteq \Omega$ Y PRUEBA POR REDUCCION AL ABSURDO

DE MODO QUE $f(D(p, \epsilon) - \{p\})$ NO ES DENSO EN \mathbb{C} , ENTONCES EXISTE $z_0 \in \mathbb{C}$ Y $\delta > 0$ CON

$$|f(z) - z_0| > \delta \quad \forall z \in D(p, \epsilon) - \{p\}$$

SE CONSIDERA

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - z_0} \in H(D(p, \epsilon) - \{p\})$$

AHORA $|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - z_0|} < \frac{1}{\delta} \quad \forall z \in D(p, \epsilon) - \{p\}$

LUEGO POR EL LEMA ANTERIOR Y TENIENDO EN CUENTA UNA SINGULARIDAD EVITABLE Y DEFINIENDO

$$g(p) = \lim_{z \rightarrow p} g(z) \text{ SABEMOS QUE } g \in H(D(p, \epsilon)).$$

COMO $g(z) \neq 0 \quad \forall z \in D(p, \epsilon) - \{p\}$,

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + z_0$$

SI $g(p) \neq 0$, ENTONCES $\exists \lim_{z \rightarrow p} f(z)$ LO CUAL NO ES POSIBLE POR HIPOTESIS

ASI $g(p) = 0$ Y $g(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{g^{(k)}(p)}{k!} (z-p)^k$ CON $g^{(m)}(p) \neq 0$

$$= (z-p)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k+m)}(p)}{(k+m)!} (z-p)^k = (z-p)^m \cdot g_1(z) \text{ CON } g_1(p) \neq 0$$

ASI $f(z) = \frac{1}{g(z)} + z_0 = \frac{1}{(z-p)^m g_1(z)} + z_0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow p} |f(z)| = \infty$

ASI f TENDRÍA UN PULO EN $z=p$ LO CUAL NO ES POSIBLE

CEROS DE FUNCIONES HOLONOMORFAS

PROP SI $f \in H(\Omega)$ Ω ABIERTO CONEXO Y $f \neq 0$
SEA $S = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$. ENTUNCES S ES
DISCRETO (E.N. $\forall z \in S \exists r > 0$ CON $D(z, r) \cap S = \emptyset$).

LEM SI $\exists z_0 \in S$ Y $(z_n) \in S$ CON $z_n \rightarrow z_0$
POR LOS TEOREMAS DE IDENTIFICACION $f \equiv 0$!!

COROLARIO: SI $f \in H(\Omega)$ Ω ABIERTO CONEXO Y $f \neq 0$
Y SI $K \subseteq \Omega$ ES UN COMPACTO, ENTUNCES

$$S = \{z \in K : f(z) = 0\}$$

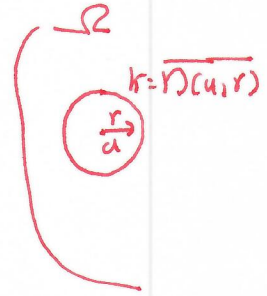
S ES FINITO.

EJEMPLO: SEA $f(z) = \sin\left(\frac{1}{1-z}\right)$ $z \in D(0, 1)$

$f \in H(D(0, 1))$. SEA $z_j = 1 - \frac{1}{j\pi}$ $j \in \mathbb{N}$

$f(z_j) = 0 \forall j \in \mathbb{N}$ Y $z_j \rightarrow 1 \in \partial D(0, 1)$

Y $f \neq 0$
ASI f NO SE PUEDE PROLONGAR DE FORMA
ANALÍTICA A $\overline{D(0, 1)}$



CURSO	N.º DE MATRÍCULA	LECHY
ASIGNATURA		CURSO
NOMBRE	DNI N.º	
APELLIDOS		