FUNCIONES MEROMORFAS

DEFINICION SI $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ES UN ABIERTO Y $f: \Omega \to \mathbb{C}$ DECIMOS QUE f ES MEROMORFA SI EXISTE $A \subseteq \Omega$ TAL QUE

a) A ES DISCRETO EN Ω. (E.D. A NO TIENE PUNTOS DE ACUMULACION EN Ω)

b) $f \in H(\Omega - A)$

c) f TIENE UN POLO EN CADA PUNTO DE A.

OBSER SI $A = \emptyset$, f ES HOLOMORFA

EJEMPLO SI $P(z)$ Y $Q(z)$ SON POLINOMIOS, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ES MEROMORFA

DESARROLLO EN SERIE DE FUNCIONES MEROMORFAS:

SI $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ES MEROMORFA

a) SI $z_0 \in \Omega - A$ $\exists \varepsilon > 0$ TAL QUE

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \quad \forall z \in D(z_0, \varepsilon)$$

b) SI $a \in A$, POLO DE ORDEN m, $\exists \varepsilon > 0$ Y $g \in H(D(a, \varepsilon))$ CON $g(a) \neq 0$ TAL QUE

$$g(z) = (z-a)^m f(z)$$

COMO $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k)}(a)}{k!}(z-a)^k$ SE SIGUE QUE

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{k+m)}(a)}{(k+m)!}(z-a)^k.$$

DEFINICION SI f TIENE UN POLO EN a SE LLAMA RESIDUO DE f EN a $\operatorname{Res}(f, a) = a_{-1}$ (EL COEFICIENTE DE $\frac{1}{z-a}$ DEL DESARROLLO DE LAURENT CENTRADO EN a DE f)

COROLARIO SI $f \in H(\Omega)$, Ω ABIERTO Y $f \not\equiv 0$, ENTONCES $\frac{1}{f}$ ES MEROMORFA.

DEM COMO VIMOS EL CONJUNTO DE CEROS DE UNA FUNCION HOLOMORFA NO NULA ES DISCRETO.

TEOREMA DE LOS RESIDUOS

TEOREMA DE LOS RESIDUOS

SEA $f\ \Omega \to \mathbb{C}$ UNA FUNCIÓN MEROMORFA CON Ω ABIERTO Y $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$ CON A DISCRETO. SEA $\Gamma^* \subset \Omega$ UN CICLO CON

$$\Gamma^* \cap A = \emptyset$$

Y TAL QUE $\operatorname{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \notin \Omega$. ENTONCES

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{a\in A} \operatorname{Res}(f,a)\cdot \operatorname{Ind}_\Gamma(a).} \quad (*)$$

FÓRMULA DE LOS RESIDUOS.

DEM

1) SEA $B = \{z \in \Omega : \operatorname{Ind}_\Gamma(z) \neq 0\} \cup \Gamma^* \subseteq \Omega$ ES COMPACTO

B ACOTADO: Γ^* ES COMPACTO, ASÍ $\exists R > 0$ CON $\Gamma^* \subset D(0,R)$

Y $\forall z \in \mathbb{C} \setminus D(0,R)$ $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$; LUEGO

$B \subseteq D(0,R)$

B ES CERRADO: SI $(z_n) \in B$ Y $z_n \to z$.

(Γ^* ES COMPACTO, LUEGO SI $(z_{n_k}) \subset \Gamma^* \Rightarrow z \in \Gamma^*$).

* SI $z \in \Gamma^* \subseteq B$.
* SI $z \notin \Gamma^*$ Y $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$, $z \in C_1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ PARA ALGUNA

C_1 COMPONENTE CONEXA ABIERTA, LO QUE IMPLICA QUE $z_n \notin B$ $\forall n \geq n_0$. CONTRADICCIÓN.

ASÍ $B \cap A$ ES FINITO, POR SER A DISCRETO EN Ω, POR TANTO $\boxed{\text{LA SUMA } (*) \text{ ES FINITA}}$

2) SEAN $\{a_1, \dots a_n\} = B \cap A$ (CADA $a_j \notin \Gamma^*$)

SEAN $Q_1 \dots Q_n$ LAS PARTES PRINCIPALES DE LOS DESARROLLOS DE LAURENT DE f EN CADA a_j

$$Q_j(z) = \sum_{n\geq 1} c_{-n}^j (z-a_j)^{-n} \qquad j = 1,2,\dots n$$

Y $Q_j \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{a_j\})$. $\left[\sum_{n=1}^N c_{-n}^j (z-a_j)^{-n} \longrightarrow Q_j(z)\right.$ UNIFORMEMENTE EN $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \{a_j\}$ K COMPACTO $\left.\right]$

SE DEFINE $g(z) = f(z) - [Q_1(z) + Q_2(z) + \cdots + Q_n(z)]$

CLARAMENTE $g \in H(\Omega_0)$ $\Omega_0 \overset{DEF}{=} \Omega \setminus (A \setminus \{a_1, \dots a_n\})$

YA QUE g TIENE SINGULARIDADES EVITABLES EN $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$

COMO $\Gamma \subseteq \Omega_0$ Y $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ $\forall \alpha \notin \Omega_0$

$[\Omega_0^c = \Omega^c \cup (A \setminus \{a_1, \dots a_n\})$ SI $\alpha \in A \setminus \{a_1, \dots a_n\}$ $\mathrm{Ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ POR LA ELECCIÓN DE LOS $a_1, a_2, \dots a_n]$

AHORA POR EL TEOREMA DE CAUCHY GLOBAL

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_\Gamma Q_j(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_j)\, \mathrm{Ind}_\Gamma(a_j)$$

Y ASÍ DESPEJANDO

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_j)\, \mathrm{Ind}_\Gamma(a_j) =$$

$$= \sum_{\substack{a \in A \\ \mathrm{Ind}_\Gamma(a) \neq 0}} \mathrm{Res}(f, a) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma(a).$$ c.q.d

---

OBSERVACIÓN: LA FÓRMULA DE LOS RESIDUOS ES "EL MÉTODO" PARA CALCULAR INTEGRALES A LO LARGO DE CAMINOS.
LO CURIOSO ES QUE CON ELLA SE PUEDEN CALCULAR INTEGRALES REALES

EJEMPLOS

RESOLVER INTEGRALES REALES USANDO LA FÓRMULA DE LOS RESIDUOS ES TODO UN "ARTE". DAREMOS DOS EJEMPLOS A TÍTULO INFORMATIVO.

CALCULAR $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2-2x+2}\,dx$.

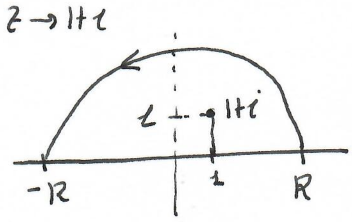
SEA $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2-2z+2} = \dfrac{e^{iz}}{(z-(1+i))(z-(1-i))} \in H(\mathbb{C}\setminus\{1+i,1-i\})$.

f ES MEROMORFA CON POLOS DE ORDEN 1 EN $1+i$ Y $1-i$ $\left[\dfrac{1}{f} = (z-(1+i))\dfrac{(z-(1-i))}{e^{iz}}\right]$

$$\operatorname{Res}(f,1+i) = \lim_{z\to 1+i} (z-(1+i))f(z) = \frac{e^{i(1+i)}}{(1+i)-(1-i)} = \frac{e^{i-1}}{2i}$$

{ FORMULA DE CALCULO EN HOJA DE PROBLEMAS }

SEA Γ_R



$$2\pi i\left(\frac{e^{i-1}}{2i}\right) = \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\Gamma_R'} \frac{e^{iz}}{z^2-2z+2}\,dz$$

$\Gamma_R' = \{|z|=R \quad \operatorname{Im} z \geq 0\}$

$$\left|\int_{\Gamma_R'} \frac{e^{iz}}{z^2-2z+2}\,dz\right| \le \sup_{z\in\Gamma_R'} \left|\frac{e^{iz}}{z^2-2z+2}\right| \cdot \operatorname{Long}\Gamma_R' \le$$

$z = Re^{it}$
$t\in[0,\pi]$

$$\le \sup_{\substack{t\in[0,\pi]\\ z=Re^{it}}} \frac{e^{-R\operatorname{sen} t}}{|z^2-2z+2|}\,\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$\big||z^2|-|2z|-2\big| \le \big||z^2-2z|-2\big| \le$
$\le |z^2-2z+2|$

ASI $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{\cos x}{x^2-2x+2} + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x^2-2x+2}\,dx = \pi e^{i-1} =$

$= \pi e^{-1}(\cos 1 + i\operatorname{sen} 1)$

LUEGO $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{\pi}{e}\operatorname{sen} 1.$

EJEMPLO

SEA $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\delta x)}{\pi x}$ $\quad x \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ FIJO

VAMOS A CALCULAR

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\delta x}{\pi x}\, e^{ix\lambda}\, dx = \hat{f}(\lambda).$$

$\boxed{\text{TRANSFORMADA DE FOURIER DE } f}$

NOTA SE TIENE QUE $\hat{f}(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\lambda| < \delta \\ 0 & \text{si } |\lambda| > 0 \end{cases}$

FILTRO PASO BAJO IDEAL EN TEORIA DE LA SEÑAL

CONVOLUCIÓN

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$$

$$\widehat{f*g}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)\cdot\hat{g}(\lambda)$$

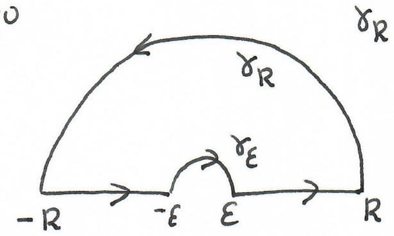
PARA CALCULAR $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\delta x}{\pi x}\, e^{ix\lambda}\, dx$

SEA $f(z) = \dfrac{e^{iza}}{\pi z}$ $\quad a > 0$

f TIENE UN POLO SIMPLE $z = 0$ Y

$$\frac{1}{\pi} = \operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z\to 0} z\cdot f(z)$$

SEA $\Gamma_{R,\varepsilon}$ EL CAMINO



$\gamma_R : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longrightarrow \gamma_R(t) = Re^{it}$

$\gamma_\varepsilon : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longrightarrow \gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{-it}$

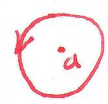
POR EL TEOREMA DE CAUCHY

$$0 = \int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{e^{iza}}{\pi z} = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ixa}}{\pi x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ixa}}{\pi x}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iza}}{\pi z} + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iza}}{\pi z}\,dz$$

SE VE QUE $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iza}}{\pi z}\,dz = 0$

SE VE QUE $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iza}}{\pi z}\,dz = -\pi i\, Res(f, 0) = -i$

USAR TEOREMA DE LOS RESIDUOS EN



γ_ε PARA γ_ε Y $\frac{e^{iza}}{\pi z}$.

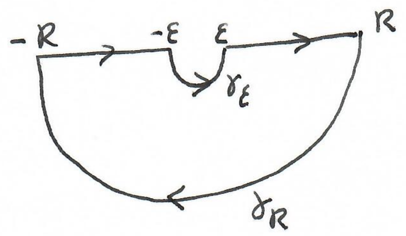
ASI $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixa}}{\pi x}\,dx = i$ SI $a>0$.

— o —

PROCEDAMOS DEL MISMO MODO CON $f(z) = \frac{e^{iza}}{\pi z}$ $a<0$

SE CONSIDERA

$\Gamma_{R,\varepsilon}$



$\gamma_R\ [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longrightarrow R e^{-it}$

$\gamma_\varepsilon\ [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longrightarrow \varepsilon e^{it}$

$$0 = \int_\Gamma \frac{e^{iza}}{\pi z}\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ixa}}{\pi x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ixa}}{\pi x}\,dx + \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iza}}{\pi z}\,dz + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iza}}{\pi z}\,dz$$

SE VE QUE $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iza}}{\pi z}\,dz = 0$

SE VE QUE $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{e^{iza}}{\pi z} = \pi i\, Res(f,0) = i$

Y ASI $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixa}}{\pi x}\,dx = -i$ SI $a<0$.

AHORA SI $\delta>0$ y $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\delta x}{\pi x}$

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\delta x}{\pi x}\, e^{ix\lambda}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\delta x \cos x\lambda}{\pi x}\, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\delta x \operatorname{sen} x\lambda}{\pi x}\, dx$$

POR LO ANTERIOR

SI $|\lambda|<\delta$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(\delta+\lambda)}}{\pi x} = i = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(\delta-\lambda)}}{\pi x}\, dx$

SI $|\lambda|>\delta$ $\begin{cases} \lambda>0 & \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(\delta+\lambda)}}{\pi x}\, dx = i \\ \lambda<0 & \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(\delta+\lambda)}}{\pi x}\, dx = -i \end{cases}$

ASI SI $|\lambda|<\delta$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(\delta+\lambda)}}{\pi x}\, dx = \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\delta \cos x\lambda}{\pi x} - \frac{\operatorname{sen}\delta x \operatorname{sen} x\lambda}{\pi x}\, dx}^{(A)}$$

$$+ i \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\delta x \cos x\lambda}{\pi x} + \frac{\cos x\delta \operatorname{sen} x\lambda}{\pi x}\, dx}^{(B)} = i$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix(\delta-\lambda)}}{\pi x}\, dx = \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\delta \cos x\lambda}{\pi x} + \frac{\operatorname{sen}\delta x \operatorname{sen} x\lambda}{\pi x}\, dx}^{(C)}$$

$$+ i \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\delta x \cos x\lambda}{\pi x} - \frac{\cos x\delta \operatorname{sen} x\lambda}{\pi x}\, dx}^{(D)} = i$$

$A = C = 0$ y $C = D = 1$

$0 = A + C \Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\delta \cos x\lambda}{\pi x}\, dx = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\delta x \operatorname{sen} x\lambda}{\pi x}\, dx = 0$

$2 = B + D \Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\delta x \cos x\lambda}{\pi x}\, dx = 1$

Y POR TANTO $\hat{f}(\lambda) = 1 + i0 = 1$

$\boxed{\text{DE FORMA SIMILAR SE VE QUE } \hat{f}(\lambda) = 0 \text{ SI } |\lambda| > \delta}$