C 1

DINÁMICA DE POBLACIONES

ECUACIÓN LOGÍSTICA:

Sea $x(t)$ la población de una especie que varía con el tiempo. Podemos suponer que el crecimiento es proporcional a la población

$$x'(t) = a\,x(t).$$

Así $x(t) = x_0 e^{at}$ CRECIMIENTO EXPONENCIAL O MALTHUSIANO

Como $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$ (si $a>0$), este modelo no es muy "creíble" para t grandes.

— · —

Si suponemos que un medio sólo "soporta" un total de k individuos, podemos suponer que el crecimiento de $\frac{x'}{x}$ es proporcional a $(k-x)$ $\begin{cases}\text{negativo si } x>k\\ \text{positivo si } x<k\end{cases}$

y así $x' = bx(k-x) \iff$ ($a = bk$)

$$\boxed{x' = ax - bx^2}$$ (Verhulst 1836) (Ecuación de tipo Bernoulli)

ECUACIÓN LOGÍSTICA

Soluciones.

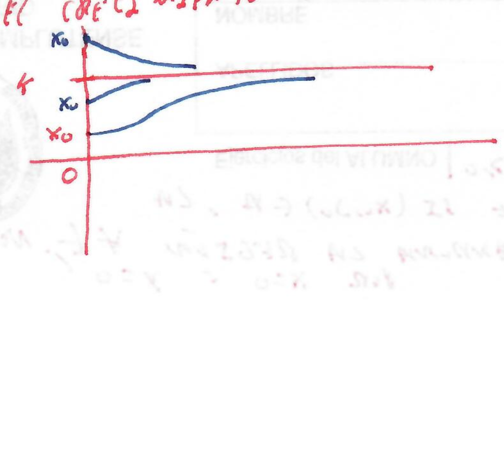
$\bar{x} = 0$

$\bar{x} = \frac{a}{b} = k$ soluciones estacionarias

Con el cambio $v(t) = \frac{1}{x(t)}$, se pasa a $v'(t) = -av(t) + b$

y la solución es $x(t) = \frac{k}{1+cke^{-at}} \xrightarrow[t\to\infty]{} k$

(Este comportamiento es más verosímil, para t grandes que el crecimiento malthusiano



ECUACIONES DE LOTKA-VOLTERRA

UN PRIMER MODELO DE UN SISTEMA DEPREDADOR - PRESA

x PRESA

y DEPREDADOR

$x'(t)$ VARÍA PROPORCIONALMENTE A $x(t)$ (PARA CRECER)

Y TAMBIÉN A $x(t)y(t)$ (PARA DECRECER, "ENCUENTRO" ENTRE PRESA Y DEPREDADOR)

$$x'(t) = a\,x(t) - b\,x(t)\,y(t)$$

$y'(t)$ VARÍA SEGÚN $x(t)y(t)$ (PARA CRECER)

Y TAMBIÉN A $y(t)$ (PARA DECRECER, A MÁS DEPREDADORES A MENOS TOCAN.)

$$y'(t) = -c\,y(t) + d\,x(t)\,y(t)$$

ASÍ EL SISTEMA

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -bxy \\ dxy \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{matrix}$$

ECUACIONES DE LOTKA-VOLTERRA

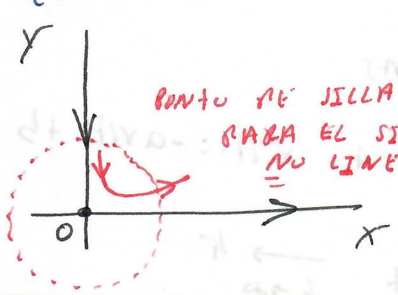
SOLUCIONES

1) $\bar{x}(t) \equiv 0$ $\quad \bar{y}(t) \equiv 0$ PUNTO DE EQUILIBRIO

2) $\bar{x}(t) \equiv 0$ $\quad \bar{y}(t) = y_0 e^{-ct}$ SE EXTINGUEN LOS DEPREDADORES A FALTA DE PRESAS.

3) $\bar{x}(t) = x_0 e^{at}$ $\quad y(t) \equiv 0$ CRECEN LAS PRESAS POR FALTA DE DEPREDADORES.

(OBSERVEMOS QUE ESTO ÚLTIMO NO ES POSIBLE PARA t GRANDES)



LA SOLUCIÓN $\overline{(x,y)} \equiv 0$ ES UN PUNTO DE SILLA PARA EL SISTEMA LINEAL Y PARA EL NO LINEAL, TAMBIÉN DE MODO LOCAL. (YA QUE LA PARTE NO LINEAL ES C^∞)

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ejercicios del ALUMNO
APELLIDOS
NOMBRE D.N.I. n.º
ASIGNATURA GRUPO
CURSO N.º DE MATRICULA FECHA

OBSERVACIÓN: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ ES UNA REGIÓN INVARIANTE YA QUE SI $(x_0, y_0) \in A$, LA SOLUCIÓN $(\bar{x}(t,x_0), \bar{y}(t,x_0))$ NO ABANDONA LA REGIÓN $\forall t$. NO PUEDE CRUZAR POR $x=0$ O $y=0$

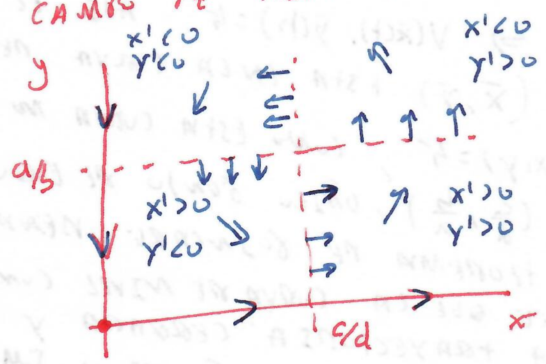
4:) La solución $(\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)$ es un punto de equilibrio

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} a-by & -bx \\ dy & -c+dx \end{pmatrix}$$

$$Df\left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}$$ por tanto los autovalores

de $Df\left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)$ son dos complejos conjugados con parte real nula, por tanto el punto de equilibrio $\left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)$, al menos localmente, todas las soluciones que empiezan cerca de él, rotan alrededor de él.

Otra forma de ver esto mismo es estudiando el campo de direcciones (visto anteriormente)



Además al estudiar

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y(-c+dx)}{x(a-by)}$$ nos queda una ecuación de variables separadas

$$\frac{a-by}{y}\,\partial y = \frac{-c+dx}{x}\,\partial x$$ cuya solución implícita

es $a\lg y - by = -c\lg x + dx + k$

$\iff dx - c\lg x + by - a\lg y = k$

Sea $V(x,y) = dx - c\lg x + by - a\lg y$ $\quad x>0,\ y>0$

Como $\frac{\partial V}{\partial x} = d - \frac{c}{x} = 0 \iff x = \frac{c}{d}$

$\frac{\partial V}{\partial y} = b - \frac{a}{y} = 0 \iff y = \frac{a}{b}$ se sigue

V tiene un mínimo en $\left(\frac{c}{d},\frac{a}{b}\right)$ $\left[HV(x,y) = \begin{pmatrix} c/x^2 & 0 \\ 0 & \frac{a}{y^2} \end{pmatrix} \right]$

ADEMAS

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f =$$

$$= \left(d - \frac{c}{x}\right) x (a - by) + \left(b - \frac{a}{y}\right) y (-c + dx) =$$

$$= (xd - c)(a - by) + (by - a)(-c + dx) = 0$$

LUEGO V ES UNA FUNCION DE LIAPUNOV PARA EL PUNTO $\left(\frac{c}{d}, \frac{b}{a}\right)$

COMO $V \xrightarrow{(*)} \infty$, SE SIGUE QUE LAS CURVAS DE NIVEL $V(x,y) = k$
SI $x \downarrow 0$
SI $y \downarrow 0$
SI $x \uparrow \infty$
ó SI $y \uparrow \infty$

* SON CURVAS (TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA)

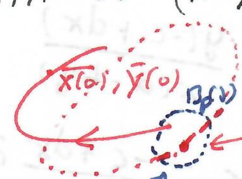
* ACOTADAS (POR (*))

* INVARIANTE (YA QUE $\forall (\bar{x}, \bar{y})$ SOLUCION $\frac{d\, V(\bar{x}(t), \bar{y}(t))}{dt} = 0$)

* ASÍ $\forall (\bar{x}, \bar{y})$ SOLUCION CON $V(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) = k$ $\Rightarrow V(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = k$, ASÍ EL W-LÍMITE DE $(\bar{x}, \bar{y})$ ESTÁ EN LA CURVA DE NIVEL $V(x,y) = k$, COMO ESTA CURVA NO CONTIENE A $\left(\frac{c}{d}, \frac{b}{a}\right)$, ÚNICO PUNTO DE EQUILIBRIO, EL TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON NOS DICE QUE LA CURVA DE NIVEL CONTIENE UNA TRAYECTORIA CERRADA Y POR EL TEOREMA DE LA FUNCION IMPLÍCITA ESTA ES $(\bar{x}\ \bar{y})$

LUEGO PODEMOS VER QUE LAS CURVAS DE NIVEL $V(x,y) = k$ SON TRAYECTORIAS CERRADAS QUE CONTIENEN AL PUNTO DE EQUILIBRIO

CLARO



← TRAYECTORIA CERRADA QUE PREDICE POINCARÉ-BENDIXSON

P PUNTO W-LÍMITE

$V(P) = V(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) = k$ ESTÁN EN LA MISMA CURVA DE NIVEL

ENTORNO ALREDEDOR DE P INFINITOS $(\bar{x}(t)\ \bar{y}(t))$ TIENE QUE HABER EN $B_\delta(P)$

Y COMO $V(P) = V(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = k$ $\forall t \geq 0$, PERO EL TEOREMA DE LA APLICACIÓN IMPLÍCITA DICE QUE SOLO LOS PUNTOS DE LA CURVA QUE PASA POR P VERIFICAN $V(P') = k$ EN UN ENTORNO DE P.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS ....
NOMBRE .... D.N.I. n.º
ASIGNATURA .... GRUPO ....
CURSO .... N.º DE MATRICULA .... FECHA

ECOLOGÍA DEPREDADOR-PRESA

UN REPARO A LAS ECUACIONES DE LOTKA-VOLTERRA ES SUPONER ILIMITADO EL CRECIMIENTO DE LAS PRESAS EN AUSENCIA DEL DEPREDADOR; POR ELLO SE PLANTEA AHORA CORREGIR ESTO METIENDO LA ECUACIÓN LOGÍSTICA

$$x' = x(a - \lambda x - by) \qquad \lambda > 0$$
$$y' = y(-c + dx - \mu y) \qquad \mu \geq 0$$

(PARA EL DEPREDADOR TAMBIÉN IMPONEMOS UNA ECUACIÓN DE TIPO "LOGÍSTICO" EN AUSENCIA DE PRESAS, AUNQUE ESTO "PUEDE SER DISCUTIBLE")

A DIFERENCIA DE LAS ECUACIONES DE LOTKA-VOLTERRA

LAS CURVAS INTEGRALES

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c + dx - \mu y)}{x(a - \lambda x - by)}$$

NO SABEMOS CÓMO INTEGRARLAS.

$\boxed{\text{VEAMOS UN ESTUDIO CUALITATIVO}}$

a) PUNTOS DE EQUILIBRIO: LAS CORRESPONDIENTES ECUACIONES LOGÍSTICAS SE ANULAN EN $\frac{a}{\lambda}$ PARA $a - \lambda x = 0$

Y $\frac{c}{-\mu} < 0$ PARA $-c - \mu y = 0$

ASÍ $(0,0)$, $\left(\frac{a}{\lambda}, 0\right)$, $\left(0, \frac{c}{-\mu}\right)$ Y (P_1, P_2) CON (P_1, P_2) SOLUCIÓN DE

$$a - \lambda x - by = 0$$
$$-c + dx - \mu y = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -b \\ d & -\mu \end{vmatrix} = \lambda\mu + db > 0$$

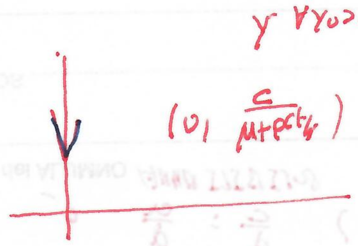
YA QUE $d \neq 0, b \neq 0$ SINO NO HAY INTERACCIÓN ENTRE PRESA Y DEPREDADOR

ÚNICOS PUNTOS DE EQUILIBRIO DEL SISTEMA.

b) NOS INTERESA SÓLO LA REGIÓN $x \geq 0$, $y \geq 0$ (NO HAY ESPECIES NEGATIVAS)

$\boxed{\text{SI } x = 0}$ $\quad y' = y(-c - \mu y)$ ✓ CUENTAS $\quad y(t) = \frac{c}{\mu + e^{ct}K} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

Y $\forall y_0 > 0 \; \exists K$ TAL QUE $y(0) = y_0$.

ASÍ  $\left(0, \frac{c}{\mu + e^{ct}K}\right)$ TIENE POR TRAYECTORIA EL SEMI-EJE POSITIVO DE LAS Y

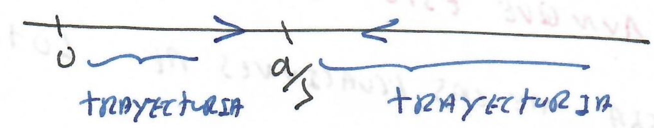
SI $y=0$

$\bar{x}=0$ $\bar{y}=0$ SOLUCIÓN ESTACIONARIA

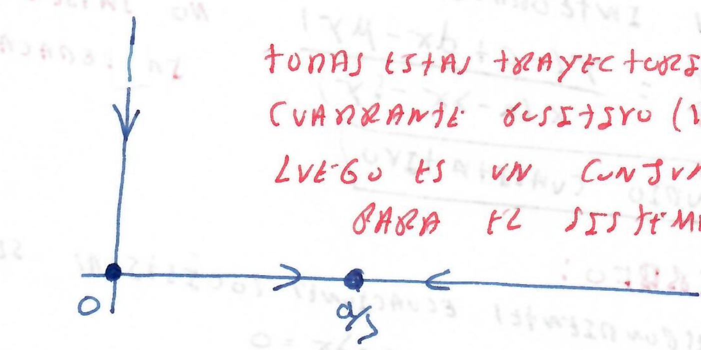
$\bar{x}=\frac{a}{\lambda}$ (POBLACIÓN DE SOPORTE DE LA ECUACIÓN LOGÍSTICA $x'=x(a-\lambda x)$) $\bar{y}=0$ ESTACIONARIA

SI $x_0\in(0,\frac{a}{\lambda})$ ó $x_0\in(\frac{a}{\lambda},\infty)$ LA SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN LOGÍSTICA (SIEMPRE TIENDE A $\frac{a}{\lambda}$ POBLACIÓN DE SOPORTE)

QUE:



ASÍ



TODAS ESTAS TRAYECTORIAS CIERRAN EL CUADRANTE POSITIVO $(\mathbb{R}^2)^+=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geq 0 \text{ y } y\geq 0\}$ LUEGO ES UN CONJUNTO INVARIANTE PARA EL SISTEMA, ALGO RAZONABLE PUES LAS ESPECIES NO TOMAN VALORES NEGATIVOS.

c) FIJÉMONOS EN LAS RECTAS

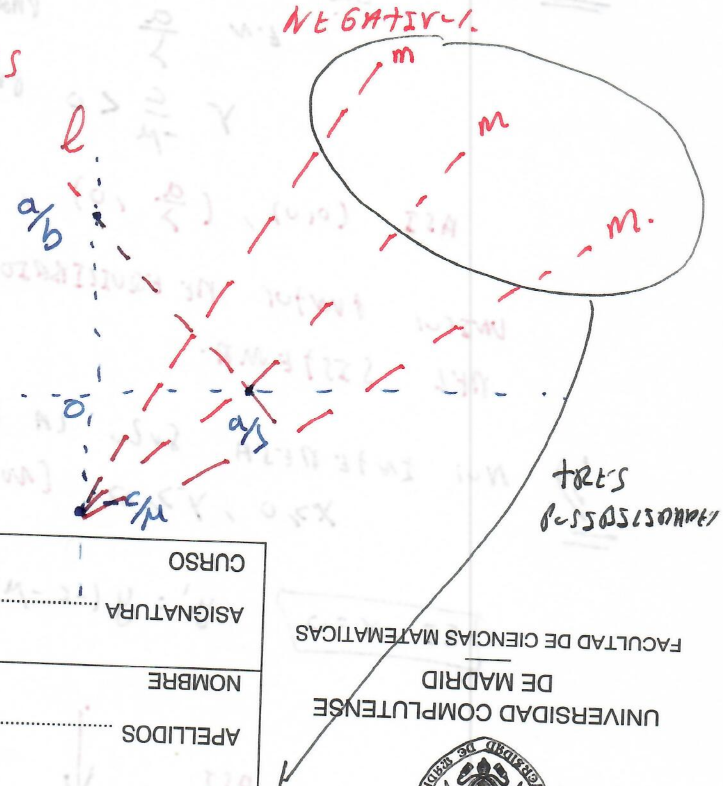
$l: a-\lambda x-by=0$

$m: -c+dx-\mu y$

LA RECTA m PASA POR LOS PUNTOS

$(0,\frac{-c}{\mu})$

Y $(\frac{c}{d},0)$



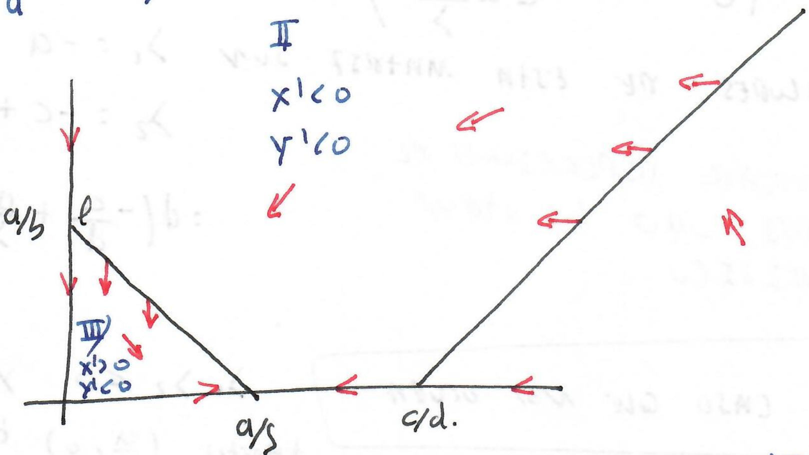
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
APELLIDOS
NOMBRE
D.N.I. n.º
ASIGNATURA
GRUPO
CURSO
N.º DE MATRICULA
FECHA
Ejercicios del ALUMNO

VAMOS A TENER VARIAS POSIBILIDADES SEGÚN $\frac{c}{d}\in(0,a/\lambda)$ $\frac{c}{d}=\frac{a}{d}$ ó $\frac{c}{d}\in(a/\lambda,\infty)$.

EN CADA CASO PODREMOS ESTUDIAR EL CAMPO DE DIRECCIONES DEL PROBLEMA:

OBSERVEMOS QUE SI $\frac{c}{d} \in [a/s, \infty)$ ENTONCES NO TENDREMOS MÁS PUNTO DE EQUILIBRIO QUE LOS DE LOS EJES (A DIFERENCIA DEL SISTEMA LOTKA-VOLTERRA) (DE FORMA SIMILAR $\frac{c}{d} = \frac{a}{s}$).

I] $\frac{c}{d} > \frac{a}{s}$

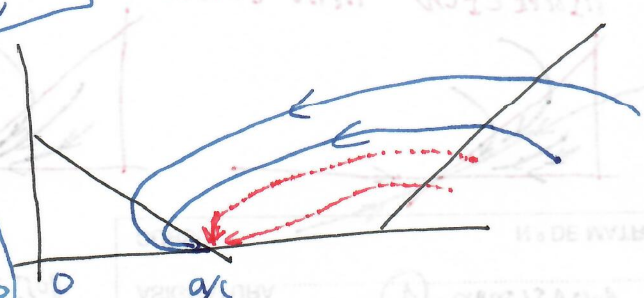


TENGO TRES REGIONES I), II) Y III) EN $(\mathbb{R}^2)^+$ Y MIRO COMO ES SU CAMPO DE DIRECCIONES.

OBSERVEMOS QUE PARA UN DATO INICIAL (x_0, y_0), SE PASA DE LA REGIÓN I A II o/ DE II A III (*) Y LA REGIÓN III ES INVARIANTE o/ (EN III) x' CRECE Y y' DECRECE LAS SOLUCIONES QUE NACEN EN III) LUEGO SOLO HAY Y LAS SOLUCIONES ESTÁN ACOTADAS LUEGO SOLO HAY UN PUNTO AL QUE TENDER A (a/s).

¿ES CIERTO QUE SI $(x_0, y_0) \in$ II, LA SOLUCIÓN CORRESPONDIENTE PASA A I O PUEDE IR DIRECTAMENTE A a/s? (*)

EN ESTE CASO SE VE QUE LA SITUACIÓN DE EQUILIBRIO ES QUE DESAPARECEN LOS DEPREDADORES Y QUE LAS PRESAS SE ESTABILICEN EN LA POBLACIÓN DE SOPORTE DEL MEDIO



EN III TODA SOLUCIÓN QUE NACE ALLÍ, TIENE ALLÍ SU ω-LÍMITE, NO PUEDE OCURRIR QUE ESTE NO CONTENGA A a/s (POR POINCARÉ BENDIXON, HABRÍA TRAYECTORIAS CERRADAS EN III Y NO ES POSIBLE $x'>0$ y $y'<0$).

SOLO NOS QUEDA VER (*)

ESTUDIEMOS EL PUNTO DE EQUILIBRIO $(a/\lambda, 0)$.

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} a-\lambda x - by - \lambda x & -bx \\ dy & -c + dx - \mu y - \mu y \end{pmatrix}$$

$$Df\left(\tfrac{a}{\lambda}, 0\right) = \begin{pmatrix} -a & -\frac{ba}{\lambda} \\ 0 & -c + \frac{da}{\lambda} \end{pmatrix}$$

LOS AUTOVALORES DE ESTA MATRIZ SON $\lambda_1 = -a$

$\lambda_2 = -c + \frac{da}{\lambda} = d\left(-\frac{c}{d} + \frac{a}{\lambda}\right)$

FALTA ESTUDIAR DIRECCIONES DE ENTRADAS ASÍ COMO LOS OTROS PUNTOS CRÍTICOS

SI $\frac{c}{d} > \frac{a}{\lambda}$ CASO QUE NOS OCUPA

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ Y POR TANTO $(\frac{a}{\lambda}, 0)$ ES

ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

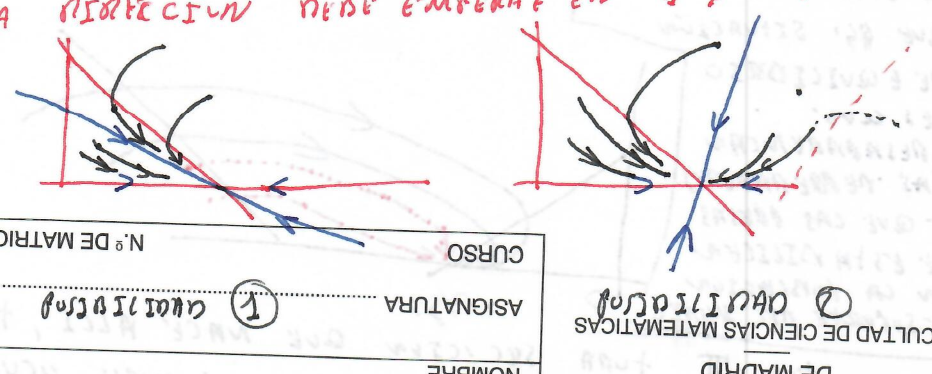
TODAS LAS SOLUCIONES QUE COMIENZAN CERCA DE EL $(\frac{a}{\lambda}, 0)$ CONVERGEN EN EL PUNTO DEL EQUILIBRIO.

AHORA LAS SOLUCIONES ENTRAN A $(\frac{a}{\lambda}, 0)$ EN 4 DIRECCIONES POSIBLES

- INFINITAS TRAYECTORIAS LO HACEN EN LA DIRECCIÓN $y = 0$ (EN CONCRETO TODAS LAS QUE COMIENZAN EN III)

VER TEOREMA HOJA 12º

- ∃ AL MENOS UNA TRAYECTORIA QUE ENTRA EN OTRA DIRECCIÓN DEBE EMPEZAR EN II Y NO ENTRAR EN III

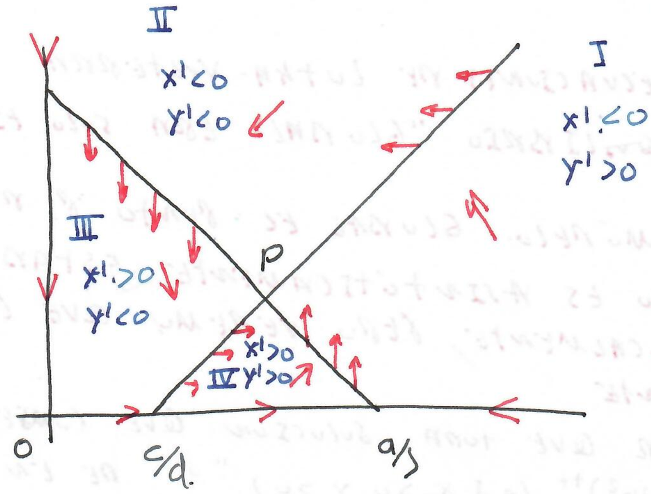


UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ejercicios del ALUMNO
APELLIDOS
NOMBRE
D.N.I. n.º
ASIGNATURA POSIBILIDAD 1
CURSO
GRUPO
N.º DE MATRICULA
FECHA

POSIBILIDAD 2

LA POSIBILIDAD 1 NO ES POSIBLE PUES FUERZA A QUE LAS DOS TANGENTES DE ENTRADA A CERO TENGAN ASOCIADAS INFINITAS TRAYECTORIAS Y ESTO NO ES POSIBLE

2º| SI $c/d < a/\lambda$ (Y POR TANTO SE CORTAN LAS RECTAS l Y m).



EL CAMPO DE DIRECCIONES INDICA QUE LA SOLUCIONES VAN A GIRAR (EN SENTIDO "POSITIVO") AL REDEDOR DEL PUNTO DE EQUILIBRIO P SOLUCIÓN DE

$$\lambda x + b y = a$$
$$-dx + \mu y = -c$$

OBSERVEMOS QUE AL SER AHORA $c/d < a/\lambda$, ENTONCES LOS AUTOVALORES DE $Df((a/\lambda), 0)$ SON $\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = -a < 0 \\ \lambda_2 = d\left(-\frac{c}{d} + \frac{a}{\lambda}\right) > 0\end{array}\right.$

LUEGO ES UN "PUNTO DE SILLA" INESTABLE Y COMO SOBRE EL EJE $Y=0$, A EL ENTRAR LAS TRAYECTORIA TODAS LAS DEMAS SE APARTAN DE EL (VER TEOREMA HOJA 16º)

EN CAMBIO EL NUEVO PUNTO DE EQUILIBRIO $P = (p_1, p_2)$ VERIFICA QUE

$$Df(p_1,p_2) = \begin{pmatrix} \underbrace{a - \lambda p_1 - b p_2}_{0} - \lambda p_1 & -b p_1 \\ d p_2 & \underbrace{-c + d p_1 - \mu p_2}_{0} - \mu p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda p_1 & -b p_1 \\ d p_2 & -\mu p_2 \end{pmatrix}$$

ESTA MATRIZ: TRAZA $-\lambda p_1 - \mu p_2 < 0$ $(p_1, p_2 > 0)$.

DETERMINANTE $\lambda\mu p_1 p_2 + d b p_1 p_2 = p_1 p_2(\lambda\mu + d b) > 0$

COMO $0 = |Df(p_1,p_2) - rI| = (-\lambda p_1 - r)(-\mu p_2 - r) + d p_2 b p_1 =$
$= r^2 - (-\lambda p_1 - \mu p_2) r + |Df(p_1,p_2)| = (r - \lambda_1)(r - \lambda_2)$ FUNCIÓN CARACTERISTICA

$\lambda_1 \lambda_2$ SON DEL MISMO SIGNO Y NEGATIVOS

LUEGO POR EL TEOREMA DE LA 1ª APROXIMACIÓN LINEAL EL PUNTO P ES UN PUNTO DE EQUILIBRIO ASINTÓTICAMENTE ESTABLE.

OBSERVACIÓN

- EN LAS ECUACIONES DE LOTKA-VOLTERRA EL PUNTO DE EQUILIBRIO "GLOBAL" ERA SOLO ESTABLE

- EN ESTE MODELO GLOBAL EL PUNTO P DE EQUILIBRIO ES ASINTÓTICAMENTE ESTABLE, DE MOMENTO LOCALMENTE, PERO VEREMOS QUE LO ES GLOBALMENTE

HAY QUE VER QUE TODA SOLUCIÓN QUE COMIENZA EN $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}^2)^{++}$ (e.d $x_0 > 0, y_0 > 0$) "TIENDE EN ASINTÓTICAMENTE" A P. (ES FÁCIL VER QUE LAS SOLUCIONES ESTÁN ACOTADAS, POR EL CAMPO DE DIRECCIONES QUE TENEMOS, ASÍ CADA TRAYECTORIA TENDRÁ UN ω-LÍMITE

- SI SE REDUCE AL PUNTO P ES LO QUE QUEREMOS PROBAR
- SI NO (DADO QUE P ES LOCALMENTE ASINTÓTICAMENTE ESTABLE Y QUE 0 Y $(a/b, 0)$ SON PUNTOS DE SILLA) EL ω-LÍMITE NO CONTENDRÍA PUNTOS CRÍTICOS Y POR POINCARÉ-BENDIXSON HABRÍA TRAYECTORIAS CERRADAS.

- VAMOS A DESCARTAR ESTA ÚLTIMA POSIBILIDAD.

PARA ESTO USAREMOS UNA MODIFICACIÓN DE LA FUNCIÓN DE LIAPUNOV QUE NOS SALÍA EN LAS ECUACIONES DE LOTKA-VOLTERRA

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ejercicios del ALUMNO
APELLIDOS
NOMBRE D.N.I. n.º
ASIGNATURA GRUPO
CURSO N.º DE MATRICULA FECHA

SEA $V(x,y) = d(x - \gamma_1 \log x) + b(y - \gamma_2 \log y)$

DONDE (γ_1, γ_2) ES EL PUNTO DE CORTE DE l CON m.

- $V \in C_1(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0, y>0\})$

- $\lim V(x,y) = \infty$
  SI $x \to 0^+$
  SI $y \to 0^+$
  SI $x \to \infty$
  SI $y \to \infty$

ADEMÁS $\frac{\partial V}{\partial x} = d\left(1 - \frac{\gamma_1}{x}\right) = 0 \Rightarrow x = \gamma_1$

$\frac{\partial V}{\partial y} = b\left(1 - \frac{\gamma_2}{y}\right) = 0 \Rightarrow x = \gamma_2$

ASÍ V TIENE UN MÍNIMO EN $P = (\gamma_1, \gamma_2)$.

- $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2 =$

$= d\left(1 - \frac{\gamma_1}{x}\right) x(a - \lambda x - by) + b\left(1 - \frac{\gamma_2}{y}\right) y(-c + dx - \mu y) =$

$= d(x - \gamma_1)[\lambda\gamma_1 + b\gamma_2 - \lambda x - by] + b(y - \gamma_2)[-d\gamma_1 + \mu\gamma_2 + dx - \mu y] =$

$a = \lambda\gamma_1 + b\gamma_2$
$-c = -d\gamma_1 + \mu\gamma_2$

$= -d\lambda(x - \gamma_1)^2 + d(x-\gamma_1)\cancel{b}[\gamma_2 - y] +$

$+ b(y - \gamma_2)\cancel{(-d)}[\gamma_1 - x] + b(y - \gamma_2)(-\mu)(y - \gamma_2) =$

$= -d\lambda(x - \gamma_1)^2 - \mu b(y - \gamma_2)^2 \leq 0 \quad \forall x, y \geq 0.$

CALCULEMOS $Z = \{(x,y) : \frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2 (x,y) = 0\} =$

$= \{(\gamma_1, \gamma_2)\}$ SI $b, d, \mu, \lambda > 0$

ω-LÍMITE $\subseteq Z$ COMO VIMOS

LUEGO TODA ... $(\bar{x}, \bar{y}) \equiv (\gamma_1, \gamma_2)$ ES UN

LO QUE PRUEBA QUE

ATRACTOR GLOBAL

<u>OBSERVACIÓN</u> LOS OTROS POSIBLES CASOS $\lambda = 0$ Ó $\mu = 0$ HACEN $Z = \{y = \gamma_2\}$ Ó $Z = \{x = \gamma_1\}$, EN CUALQUIER CASO Z SÓLO TIENE A $\{(\gamma_1, \gamma_2)\}$ COMO COMPACTO INVARIANTE (HAY QUE VER EL CAMPO DE DIRECCIONES SOBRE Z - COMO EN EL CASO DEL BIEN NULO) Y POR EL PRINCIPIO DE INVARIANZA DE LASALLE, SE LLEGA A QUE $\{(\gamma_1, \gamma_2)\}$ ES UN ~~A~~ATRACTOR GLOBAL

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS ....

NOMBRE D.N.I. n.º

ASIGNATURA .... GRUPO ....

CURSO N.º DE MATRICULA FECHA

ESPECIES EN COMPETENCIA

SEAN AHORA $x(t), y(t)$ POBLACIONES DE DOS ESPECIES QUE COMPARTEN MEDIO O HABITAT Y QUE COMPITEN POR LOS RECURSOS DEL MISMO; SE PROPONE LAS ECUACIONES

$$x'(t) = x(t)(a - bx - cy)$$
$$y'(t) = y(t)(d - ex - fy).$$

LA PARTE $x(a-bx)$, $y(d-fy)$ SON LA ECUACION LOGÍSTICA PARA x e y Y DESPUÉS LOS TERMINOS $-c\,x(t)\,y(t)$ $-e\,y\,x$ SON LAS CONSECUENCIAS "NEGATIVAS" DE LA COMPETICION PARA CADA ESPECIE.

SI LAS ESPECIES COMPITEN $\underline{c, e > 0}$

SOLO TIENE SENTIDO PLANTEAR EL PROBLEMA EN $(\mathbb{R}^2)^+$

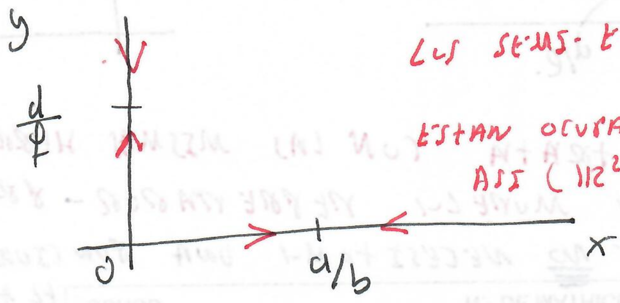
PUNTO DE EQUILIBRIO.

$(\bar{x}, \bar{y}) \equiv (0,0)$

SI $\bar{x} = 0$ $\left(0, \frac{d}{f}\right)$ CAPACIDAD DE SOPORTE DEL MEDIO PARA LA ESPECIE Y

SI $\bar{y} = 0$ $\left(\frac{a}{b}, 0\right)$. CAPACIDAD DE SOPORTE DEL MEDIO PARA LA ESPECIE X

EN AMBOS CASOS, COMO VIMOS EN EL MODELO DEPREDADOR-PRESA, SE LLEGA AL RESOLVER LAS RESPECTIVAS ECUACIONES LOGÍSTICAS A QUE

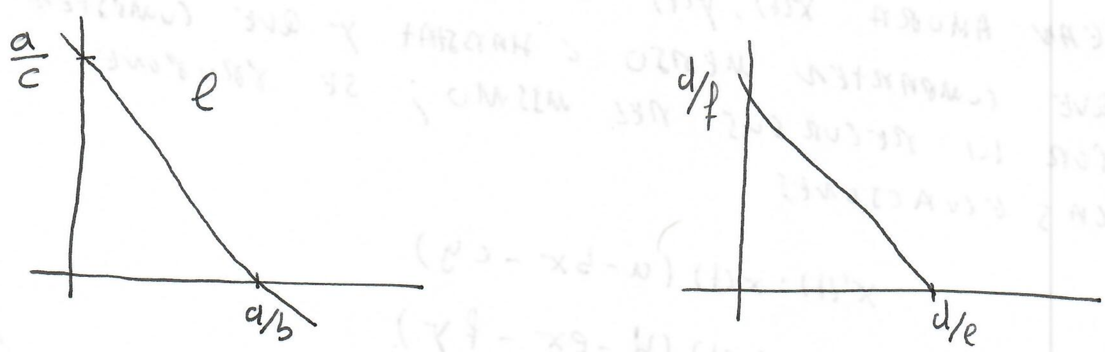


LOS SEMI-EJES $y=0$ $x \geq 0$ Y $x=0$ $y \geq 0$ ESTAN OCUPADOS POR TRAYECTORIAS ASI $(\mathbb{R}^2)^+$ ES UNA REGION INVARIANTE

SEAN LAS RECTAS $l: a - bx - cy = 0$
$m: d - ex - fy = 0$

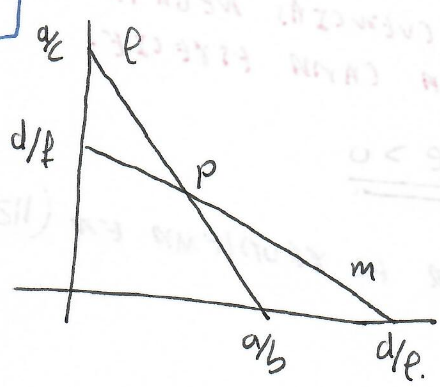
SI ESTAS RECTAS SE CORTAN O NO DARAN LUGAR A UN NUEVO PUNTO DE EQUILIBRIO O NO, EN TODO CASO DARA LUGAR A DISTINTOS DIAGRAMAS DE FASES.

HAY CUATRO CASOS POSIBLES

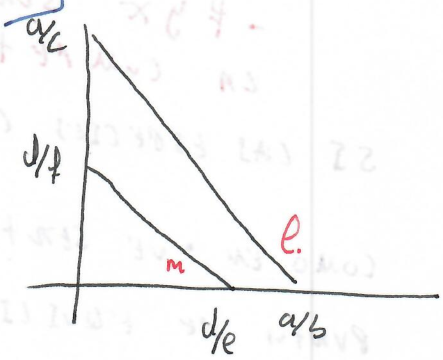


$l: a-bx-cy=0$ $\qquad$ $m: d-ex-fy=0$

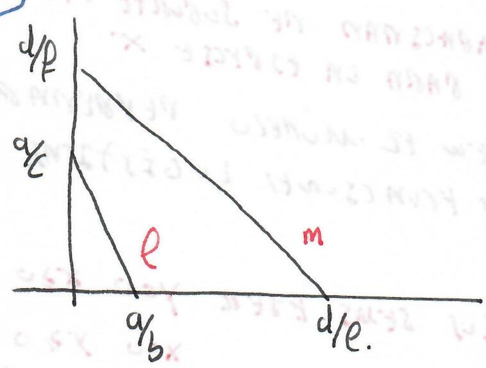
1:)



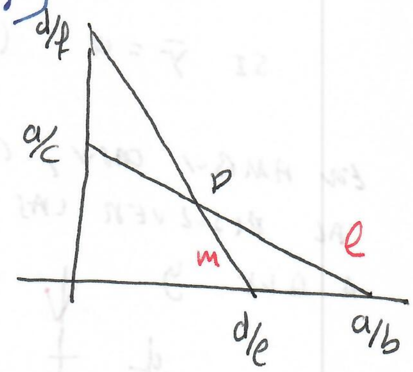
2:)



3:)



4:)



— CADA CASO SE TRATA CON LAS MISMAS HERRAMIENTAS QUE USAMOS EN LOS MODELOS DEPREDADOR-PRESA. [SALVO AL FINAL DONDE NO NECESITAMOS UNA FUNCION DE LIAPUNOV PARA EL ANÁLISIS GLOBAL DADA LA MONOTONÍA DEL CAMPO DE DIRECCIONES]

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ejercicios del ALUMNO
APELLIDOS
NOMBRE .... D.N.I. n.º
ASIGNATURA .... GRUPO ....
CURSO N.º DE MATRICULA FECHA

— OBSERVEMOS QUE LOS DIBUJOS 1:) y 4:) y 2:) y 3:) SON ANÁLOGOS SIN MÁS QUE INTERCAMBIAR LOS PAPELES DE x e y; SIN EMBARGO AUNQUE ESTO ES CIERTO PARA 2 y 3, 1 y 4: SON RADICALMENTE DISTINTOS.

EJEMPLO DE DINÁMICA DE POBLACIONES

SEAN $x(t)$, $y(t)$ DOS POBLACIONES DE ESPECIES DIFERENTES QUE COMPARTEN EL MISMO MEDIO Y CONSISTEN EN EL

$$x'(t) = x(2 - x - y).$$

$$y'(t) = y(2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2}y).$$

REPRESENTAR EL DIAGRAMA DE FASES DE ESTE SISTEMA Y SACAR CONCLUSIONES SOBRE EL MISMO.

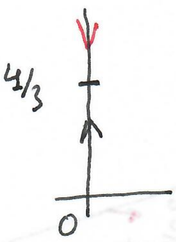
1º NOS INTERESA TRABAJAR EN $(\mathbb{R}^2)^+$

- $\bar{x}=0$ $\bar{y}=0$ PUNTO DE EQUILIBRIO

- SI $x=0$ $\quad y' = y(2 - \tfrac{3}{2}y)$ ECUACIÓN LOGÍSTICA

CON $K_y = \dfrac{2}{3/2} = \tfrac{4}{3}$ POBLACIÓN DE SOPORTE

ASÍ



EL EJE Y ESTÁ LLENO DE TRAYECTORIAS CON $(0, \tfrac{4}{3})$ PUNTO DE EQUILIBRIO

- SI $y=0$ $\quad x' = x(2-x)$ ECUACIÓN LOGÍSTICA

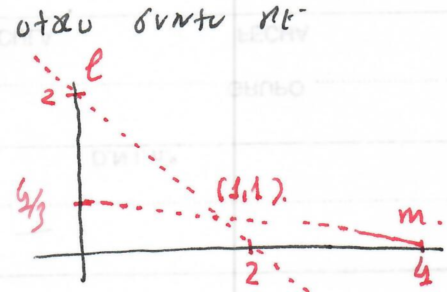
CON $K_x = 2$ POBLACIÓN DE SOPORTE

EL EJE X ESTÁ LLENO DE TRAYECTORIAS CON $(2,0)$ PUNTO DE EQUILIBRIO

- $2 = x + y$
  $2 = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}y$ $\Rightarrow$ $\bar{x}=1$ $\bar{y}=1$ ES OTRO PUNTO DE EQUILIBRIO

$l : 2 - x - y = 0$

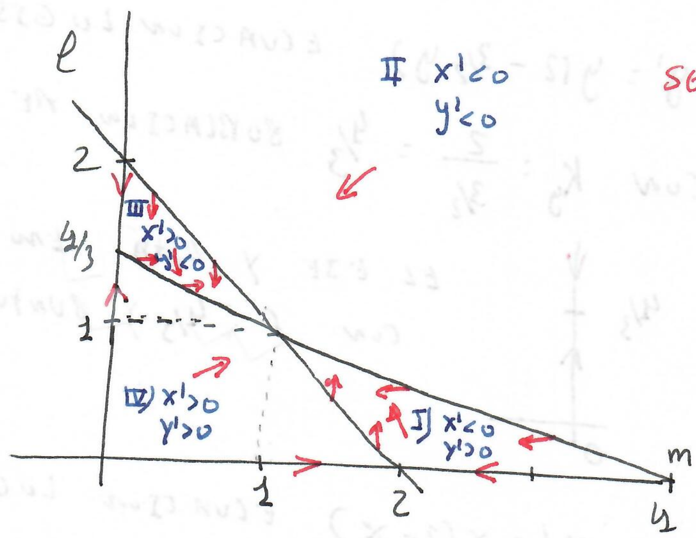
$m : 2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2}y = 0$



• Como los semiejes $y=0$ $x\geq 0$ y $x=0$ $y\geq 0$ están ocupados por trayectorias se sigue que el conjunto $(\mathbb{R}^2)^+$ es invariante.

2º) Campo de direcciones

Como $x, y \geq 0$ sólo hace falta estudiar los signos de $2-x-y$ y $2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y$



Según este campo de direcciones las regiones I y III son invariantes

De la región II se puede pasar a la I y III

De la región IV se puede pasar a la I) y III)

Ejercicios del ALUMNO
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
APELLIDOS ....
NOMBRE .... D.N.I. n.º
ASIGNATURA .... GRUPO ....
CURSO N.º DE MATRICULA FECHA

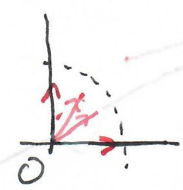
3º) Estudio de los puntos críticos.

$$Df(x,y)=\begin{pmatrix} 2-x-y-x & -x \\ -\frac12 y & 2-\frac12 x-\frac32 y-\frac32 y\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2-2x-y & -x \\ -\frac12 y & 2-\frac12 x-3y\end{pmatrix}$$

Si $(\bar x,\bar y)=(0,0)$ $\quad Df(0,0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ luego

— $(\bar x,\bar y)=(0,0)$ es un nodo estelar y como $f\in C^{\infty}$, por un teorema que cerca de cero salen trayectorias en todas las direcciones



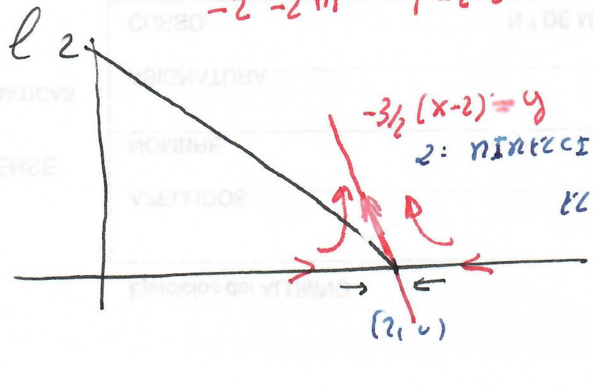
— $(\bar x,\bar y)=(2,0)$ $\quad Df(2,0)=\begin{pmatrix}-2&-2\\0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & -2\\0&1-\lambda\end{vmatrix}=-(2+\lambda)(1-\lambda)\ \Big\}\ \begin{matrix}\lambda=-2\\ \lambda=1\end{matrix}$$ es un punto de silla;

luego $(2,0)$ es un punto de silla y como la trayectoria que entra es el eje x como sabemos,

la variedad que sale tiene pendiente

$$m=\frac{0+m}{-2-2m}\ \left\{\begin{matrix} m=0\\ \text{ó}\\ -2-2m=1 \Rightarrow m=-\frac32\end{matrix}\right.$$



2: dirección de salida a $(2,0)$

el resto de trayectorias se alejan de $(2,0)$

$- (\bar{x}, \bar{y}) = (0, 4/3)$

$$Df(0, 4/3) = \begin{pmatrix} 2 - 4/3 & 0 \\ -1/2 \, 4/3 & 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ -2/3 & -2 \end{pmatrix}$$

AUTOVALORES $\lambda = 2/3$ Y $\lambda = -2$ LUEGO $(0, 4/3)$ ES UN PUNTO DE SILLA

LA TRAYECTORIA QUE ENTRA ES EL EJE $x = 0$ COMO SABEMOS

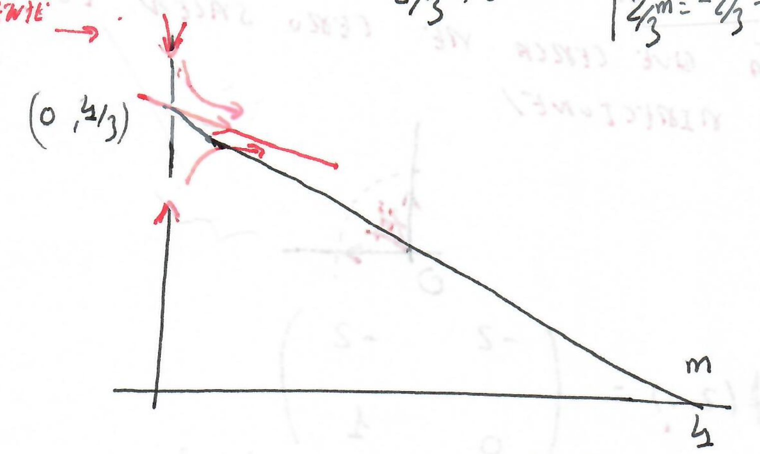
LA TRAYECTORIA QUE SALE TIENE PENDIENTE EN $(0, 4/3)$ IGUAL A m

$$m = \frac{-2/3 - 2m}{2/3 + 0m}$$

$m = \infty$ SIRVE, EL $x = 0$; $a_{12} = 0$

$\frac{2}{3}m = -2/3 - 2m \iff \frac{8}{3} m = -2/3 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$

PENDIENTE $-\frac{1}{4}$



$- (\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ $\quad Df(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

LOS AUTOVALORES ASOCIADOS SON $0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -1/2 & -3/2 - \lambda \end{vmatrix} =$

$= (1+\lambda)(3/2 + \lambda) - 1/2 = \lambda^2 + 5/2 \lambda + 3/2 - 1/2 = \lambda^2 + 5/2 \lambda + 1$

$$\lambda = \frac{-5/2 \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{2} = \frac{-5/2 \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{-5/2 \pm \frac{3}{2}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{8}{4} = -2 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

ESTAMOS ANTE UN NODO ASINTOTICAMENTE ESTABLE

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
CURSO N.º DE MATRICULA FECHA
ASIGNATURA GRUPO
NOMBRE D.N.I. n.º
APELLIDOS
Ejercicios del ALUMNO

EL AUTOESPACIO ASOCIADO A $\lambda_2 = -1/2$

ES $-\frac{1}{2}x - y = 0$ PENDIENTE DE ESTA RECTA ES $-\frac{1}{2}$.

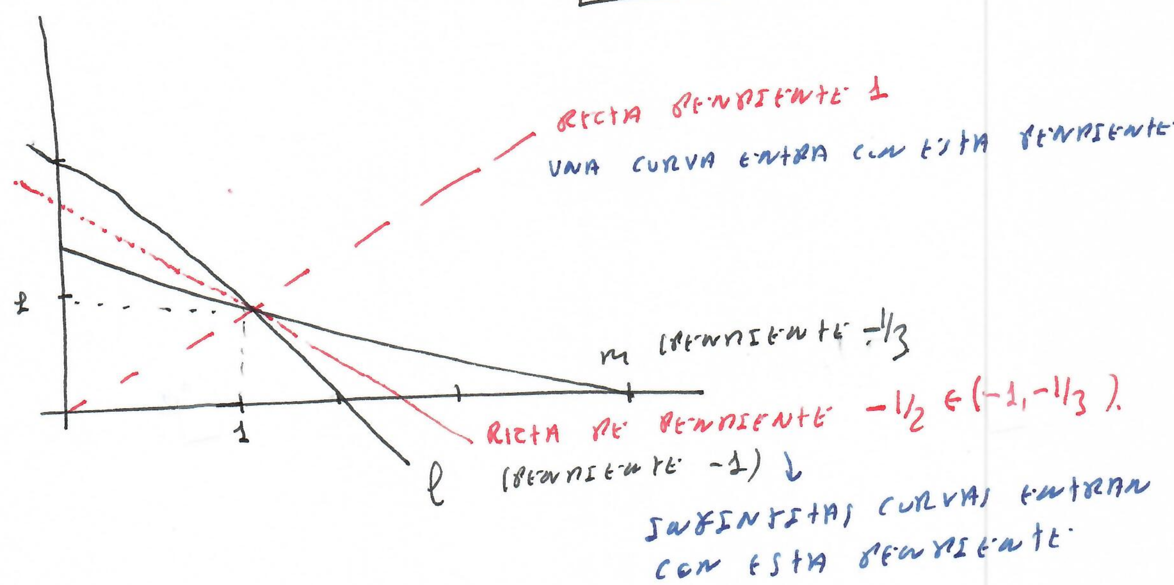
(INFINITAS TRAYECTORIAS ENTRAN A (1,1) CON ESTA PENDIENTE)

EL AUTOESPACIO ASOCIADO A $\lambda_1 = -2$

ES $x - y = 0$ PENDIENTE DE ESTA RECTA ES 1

HAY UNA ÚNICA TRAYECTORIA QUE ENTRA A (1,1) CON ESTA PENDIENTE

$$\boxed{m = \frac{-1/2 - 3/2\, m}{-1 - m} \Rightarrow m = -1/2 \text{ ó } 1}$$



OBSERVACIÓN
LA MONOTONÍA DEL CAMPO DE DIRECCIONES EN I) II) III) Y IV) JUNTO CON EL TEOREMA DE PROLONGACIÓN DE SOLUCIONES NOS PERMITE DESCARTAR SOLUCIONES CICLO-LÍMITES; ASÍ PARA EL ANÁLISIS GLOBAL NO NECESITAMOS UNA FUNCIÓN DE LIAPUNOV

(VER 10bis)

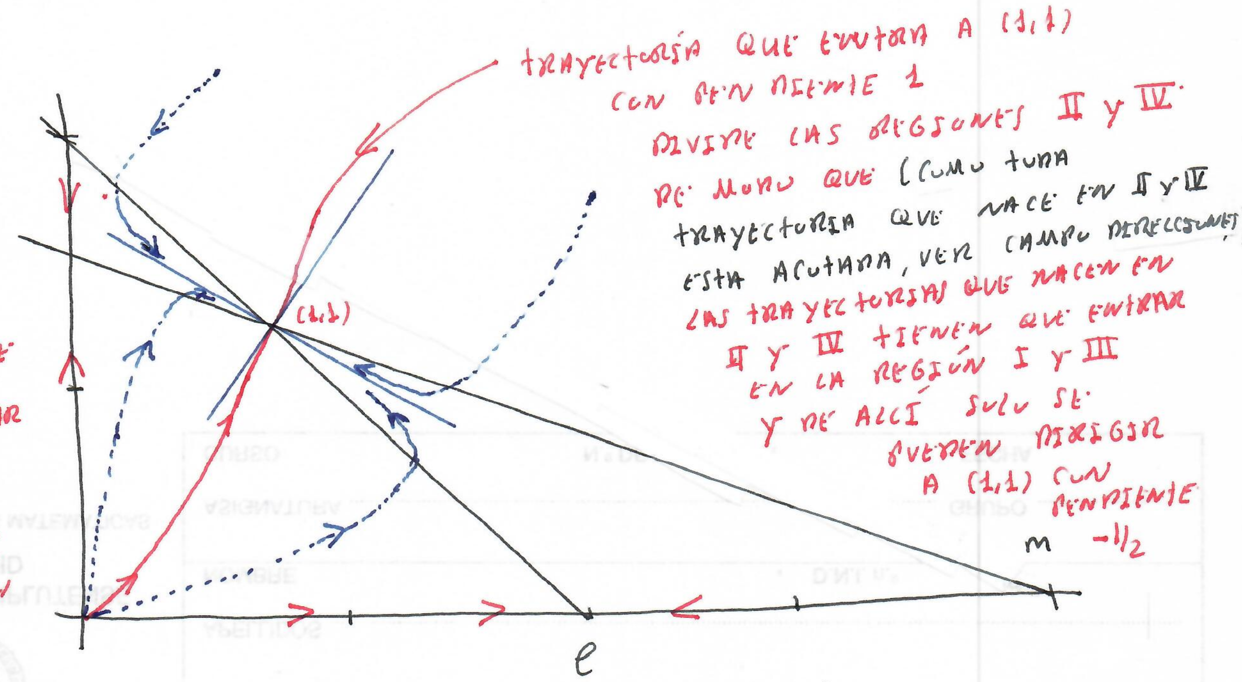


DIAGRAMA DE FASES DEL SISTEMA

PARECE QUE LAS ESPECIES TIENDEN A UN EQUILIBRIO ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

10 bis

AHORA COMO EN EL CASO DEPREDADOR-PRESA,
SE PUEDE CONSIDERAR $x' = x(2-y)$ "QUITAMOS LA ECUACIÓN
$y' = y(2 - \frac{1}{2}x)$ LOGÍSTICA"

SE PUEDE CALCULAR UNA INTEGRAL PRIMERA Y TRATAR
DE UTILIZARLA COMO FUNCIÓN DE LIAPUNOV.

$$\begin{cases} x' = x(2-x-y) \\ y' = y(2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y) \end{cases} \qquad \hat{x} = 1,\ \hat{y} = 1.$$

$$L = x - \ln x + y - \ln y \Rightarrow \dot{L} = (x-1)(2-x-y) + (y-1)\left(2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y\right)$$

$\frac{x-1}{x}$

Haciendo $\xi = x-1,\ \eta = y-1$,

$$\dot{L} = (x-1)(2-x-y) + (y-1)\left(2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y\right)|_{x=1+\xi, y=1+\eta} =$$

$$\xi(-\xi-\eta) + \eta\left(-\frac{1}{2}\xi - \frac{3}{2}\eta\right) = -\frac{3}{2}\xi\eta - \xi^2 - \frac{3}{2}\eta^2 < 0\ \forall(\xi,\eta) \neq (0,0).$$

Luego L es función de Liapunov estricta en el primer cuadrante abierto.

PARA EL CASO GENERAL VER EL ARTÍCULO ADJUNTO.

PRÁCTICA

NOMBRE Y APELLIDOS ....

EJEMPLO DE DINÁMICA DE POBLACIONES

SEAN $x(t)$, $y(t)$ DOS POBLACIONES DE ESPECIES DIFERENTES QUE COMPARTEN EL MISMO MEDIO Y COMPITEN EN ÉL; SEA EL SISTEMA

$$x'(t) = x(2 - x - y)$$
$$y'(t) = y(2 - 1/2\, x - 3/2\, y).$$

OBSERVACIÓN

$x'(t) = x(2 - x)$
$y'(t) = y(2 - 3/2\, y)$

ECUACIONES LOGÍSTICAS DE x E y SIN LA INTERACCIÓN DE LA OTRA ESPECIE.

DIBUJAR EL DIAGRAMA DE FASES DE ESTE SISTEMA Y SACAR CONCLUSIONES SOBRE ÉL.

$\boxed{\text{IDEA}}$ SE PUEDE IR VIENDO DE FORMA SUCESIVA

1º) QUE LA REGIÓN $(\mathbb{R}^2)^+$ ES INVARIANTE

(ESTUDIAR LAS TRAYECTORIAS TRIVIALES $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$;
$\bar{x} = 0$ $\bar{y} = ?$; $\bar{y} = 0$ $\bar{x}?$).

2º) REPRESENTAR EL CAMPO DE DIRECCIONES.
- ENCONTRAR REGIONES INVARIANTES.

3º) ENCONTRAR TODOS LOS PUNTOS CRÍTICOS Y HACER UN ESTUDIO LOCAL DE ELLOS.

ENCONTRAR EN SU CASO LAS PENDIENTES DE LAS DIRECCIONES DE ENTRADA A LOS PUNTOS CRÍTICOS

4º) DIBUJAR UN DIAGRAMA DE FASES RAZONABLE

5º) ¿PODRÍAS ENCONTRAR UNA FUNCIÓN DE LIAPUNOV PARA ESTE SISTEMA?

(VER ARTÍCULO DE DETRÁS pg 212)

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
DE MADRID
CURSO Nº DE EXAMEN FECHA
ASIGNATURA GRUPO
NOMBRE D.N.I. Nº
APELLIDOS
Firma del alumno