PRÁCTICA

NOMBRE Y APELLIDOS . . . .

1º ¿ES ESTABLE LA SOLUCIÓN PERIÓDICA DE LA ECUACIÓN $x'''(t) + 2x''(t) + 5x'(t) + 3x(t) = \cos t$?

SEA EL SISTEMA EQUIVALENTE

$$\left.\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_3(t) \\ x_3'(t) &= -3x_1(t) - 5x_2(t) - 2x_3(t) + \cos t \end{aligned}\right\} (*) \iff$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix}$$

SEA $\rho(t)$ LA SOLUCIÓN PERIÓDICA DE LA ECUACIÓN DE ORDEN 3, ENTONCES

$\bar{\rho}(t) = (\rho(t), \rho'(t), \rho''(t))$. ES SOLUCIÓN DEL SISTEMA ASOCIADO $(*)$.

AHORA SI $\bar{\rho}$ ES ESTABLE $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ TAL QUE SI $\|\bar{\rho}(t_0) - \bar{x}(t_0)\| < \delta$

$$\Rightarrow \|\bar{\rho}(t) - \bar{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Y ASÍ $\quad |\rho(t) - x(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$

DONDE x ES SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE 3$^{\text{er}}$ ORDEN

ASÍ ES SUFICIENTE CON ESTUDIAR LA ESTABILIDAD DE $\bar{\rho}$.

SEA EL CAMBIO $\bar{y}(t) = \bar{x}(t) - \bar{\rho}(t)$.

COMO $(*)$ ES LINEAL, PASAMOS AL SISTEMA $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $(**)$

LUEGO LA ESTABILIDAD DE $\bar{\rho}$ EN $(*)$ ES EQUIVALENTE A LA DE $\bar{y} \equiv 0$ EN $(**)$

$$0 = |A - \lambda I| = -(\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda + 3) = -f(\lambda).$$

$f'(\lambda) = 3\lambda^2 + 4\lambda + 5 > 0$ SOLO HAY UNA RAÍZ REAL $\lambda_1 \in (-2, 0)$ POR EL TEOREMA DE BOLZANO

IDEA

- SEA $\rho(t)$ LA SOLUCIÓN ALUDIDA
- SI $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = x''$ ESCRIBIR LOS SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEO Y NO HOMOGÉNEO ASOCIADOS A LA ECUACIÓN
- $\bar{\rho}(t) = (\rho(t), \rho'(t), \rho''(t))$ ES UNA SOLUCIÓN DEL SISTEMA NO HOMOGÉNEO
- EL CAMBIO $\bar{y}(t) = \bar{x}(t) - \bar{\rho}(t)$ PERMITE ESTUDIAR LA ESTABILIDAD EN $\bar{y} \equiv 0$ EN LUGAR DE $\bar{\rho}(t)$ ¿POR QUÉ?
- ESTUDIAR EL SIGNO DE LOS AUTOVALORES DE LA MATRIZ DEL SISTEMA HOMOGÉNEO
  - EXISTE UN ÚNICO AUTOVALOR REAL ENTRE $(-2, 0)$
  - NO EXISTEN AUTOVALORES DE LA FORMA bi

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - (a+bi))(\lambda - (a-bi)) =$$
$$= \lambda^3 + (-2a - \lambda_1)\lambda^2 + (a^2+b^2+\lambda_1 2a)\lambda - \lambda_1(a^2+b^2)$$

ASÍ $\quad -2a - \lambda_1 = 2 \quad \Rightarrow a = -1 - \frac{\lambda_1}{2} < 0$

LUEGO LAS TRES RAICES DE $|A - \lambda I| = 0$ TIENEN PARTE REAL NEGATIVA, ASÍ $\bar{y} \equiv 0$ ES ASINTÓTICAMENTE ESTABLE, LO MISMO QUE $\bar{\varphi}$ EN (*) LO MISMO QUE $\varphi(t)$.

(2º) SEA $x'(t) = f(x(t))$ CON $f \in C^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ABIERTO, CON $f(0) = 0$. SISTEMA AUTÓNOMO CON $\bar{x} \equiv 0$ SOLUCIÓN CONSTANTE

SI $V \in C^1(B_0(r))$ ES UNA FUNCIÓN DE LIAPUNOV CON $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x)\, f_i(x) < 0 \quad \forall x \in B_0(r) \setminus \{0\}$

PROBAR QUE $\bar{x} \equiv 0$ ES UNA SOLUCIÓN ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

SEA $r > 0$ CON $\overline{B_0(r)} \subseteq A$.

SEA $\delta < r$ TODO LO PEQUEÑO QUE HAGA FALTA.

$K = \overline{B_0(r)} \setminus B_0(\delta)$ ES UN CERRADO Y ACOTADO EN $\mathbb{R}^n$, POR TANTO UN COMPACTO.

COMO $V \in C^1(\overline{B_0(r)})$ LA FUNCIÓN $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i$ ES CONTINUA EN $\overline{B_0(r)}$

ASÍ $\exists a \in K$ TAL QUE

$$0 > \beta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(a)\, f_i(a) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x) : x \in K \right\}$$

LUEGO SI $\|x\| \geq \delta \Rightarrow \exists \beta < 0$ CON

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x)\, f_i(x) \leq \beta < 0$$

IDEA

- VER QUE SE VERIFICAN LAS HIPÓTESIS DEL TEOREMA DE ESTABILIDAD ASINTÓTICA
- ¿ $\bar{x} \equiv 0$ ES ESTABLE?
- SI $\varepsilon > 0$ y $0 < \delta_1 < \varepsilon$ $\overline{B_0(\varepsilon)} - B_0(\delta_1)$ ES COMPACTO
- $\nabla V \cdot f = \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i$ ES CONTINUA ¿POR QUÉ?

POR LO TANTO ESTAMOS EN LAS HIPÓTESIS DEL TEOREMA DE LIAPUNOV SOBRE ESTABILIDAD ASINTÓTICA; LO QUE PRUEBA QUE $\bar{x} \equiv 0$ ES UNA SOLUCIÓN ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

3°) SEA EL SISTEMA

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial u(x_1 \ldots x_n)}{\partial x_1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial t} = \frac{\partial u(x_1 \ldots x_n)}{\partial x_n}$$

$u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. CON $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ Y $u(0) = 0$, DONDE $x=0$ ES UN MÁXIMO ESTRICTO DE u.

PROBAR QUE $\bar{x} \equiv 0$ ES UNA SOLUCIÓN ESTABLE DEL SISTEMA.

EL SISTEMA $x'(t) = \nabla u(x(t))$.
TIENE UNA SOLUCIÓN CONSTANTE EN $\bar{x} \equiv 0$ YA QUE $\nabla u(0) = 0$, 0 ES MÁXIMO DE u Y $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, LUEGO EL GRADIENTE SE ANULA EN 0.

SEA $V(x) = u(0) - u(x) \in C^1(\mathbb{R}^n$

1:) $V(x) \geq 0$ YA QUE $u(0)$ ES EL MÁXIMO DE u. Y COMO ES ESTRICTO $V(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

2:) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} -\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

POR LO TANTO V ES UNA FUNCIÓN DE LIAPUNOV Y ASÍ $\bar{x} \equiv 0$ ES UNA SOLUCIÓN ESTABLE

IDEA

- ¿POR QUÉ $\nabla u(0) = 0$?
- ¿POR QUÉ $\bar{x} \equiv 0$ ES SOLUCIÓN DEL SISTEMA?
- BUSCAR UNA FUNCIÓN DE LIAPUNOV
- ¿SIRVE $V(x) = u(0) - u(x)$?

4.

SEA EL SISTEMA LINEAL

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j$$

CON $a_{ij} \in C^1(\mathbb{R})$, $\forall i,j = 1 \dots n$.

CON $a_{ij}(t) = -a_{ji}(t)$ SI $i \neq j$

CON $a_{ii}(t) < 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $i = 1 \dots n$.

Y $\lim_{t \to \infty} a_{ii}(t) = \beta_i < 0$ $\forall i = 1 \dots n$.

PROBAR QUE $\bar{x} \equiv 0$ ES UNA SOLUCIÓN ASINTÓTICAMENTE ESTABLE DEL SISTEMA

SEA $V(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. $x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1°) $V(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ Y $V(x) = 0 \iff x = 0$

2°) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j \right) =$

$= \sum_{i=1}^{n} 2 x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j \right) =$

$= 2 \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_i x_j \right) \underset{a_{ij} = -a_{ji}}{=}$

$2 \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) x_i^2 \leq 0$ YA QUE $a_{ii}(t) < 0$.

IDEA

- ESCRIBIR EL SISTEMA LINEAL EN FORMA MATRICIAL
- ¿POR QUE $\bar{x} \equiv 0$ ES SOLUCIÓN?
- BUSCAR UNA FUNCIÓN DE LIAPUNOV.

LUEGO V ES UNA FUNCIÓN DE LIAPUNOV Y ASÍ $\bar{x} \equiv 0$ (SOLUCIÓN CONSTANTE DEL SISTEMA LINEAL) ES ESTABLE

ADEMÁS SI $\beta/2 = \max \{\beta_i \; i = 1 \dots n\} < 0$ $\exists T$ TAL QUE $\forall t > T$ $|a_{ii}(t)| < \beta/2$ $\forall i = 1 \dots n$, ADEMÁS $a_{ii}|[t_0, T]$ ALCANZA UN MÍNIMO MENOR ESTRICTAMENTE QUE 0, LUEGO $\exists r$ CON $a_{ii}(t) \leq r < 0$ $\forall t \geq t_0$ Y $\forall i = 1 \dots n$. ASÍ

$2 \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) x_i^2 < 2 \sum_{i=1}^{n} r x_i^2 < 2 r \delta^2 < 0$ $\forall x$ CON $\|x\| \geq \delta$

ASÍ $\bar{x} \equiv 0$ ES ASINTÓTICAMENTE ESTABLE.

PRACTICA

NOMBRE Y APELLIDOS . . . .

① SEA EL SISTEMA

$$x'(t) = a x(t) + b y(t) + R_1(x(t), y(t))$$
$$y'(t) = -b x(t) + a y(t) + R_2(x(t), y(t))$$

CON $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{R_i(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$

(1.i) HACER EL CAMBIO DE VARIABLE

$$(*)\quad \begin{cases} x(t) = r(t)\cos(\theta(t)) \\ y(t) = r(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t) \end{cases}$$

Y COMPROBAR QUE EL SISTEMA QUEDA DE LA FORMA

$$r' = ar + \rho(r,\theta)$$
$$\theta' = -b + \frac{1}{r} w(r,\theta)$$

SIDEA
DERIVAR EN (*) Y RESOLVER EL SISTEMA LINEAL RESULTANTE EN r' Y θ'.

$$x'(t) = r'(t)\cos\theta(t) - r(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t)\,\theta'(t)$$
$$y'(t) = r'(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t) + r(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t)\,\theta'(t)$$

EL DETERMINANTE DE ESTE SISTEMA ES

$$\begin{vmatrix} \cos\theta(t) & -r(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t) \\ \mathrm{sen}\,\theta(t) & r(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t) \end{vmatrix} = r(t)$$

ASI

$$r'(t) = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & -r(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t) \\ y'(t) & r(t)\cos\theta(t) \end{vmatrix}}{r(t)} = x'(t)\cos\theta(t) + y'(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t)$$

$$\theta'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos\theta(t) & x'(t) \\ \mathrm{sen}\,\theta(t) & y'(t) \end{vmatrix}}{r(t)} = \frac{\cos\theta(t)\,y'(t) - \mathrm{sen}\,\theta(t)\,x'(t)}{r(t)}$$

ASI SUSTITUYENDO x' E y'

$$r'(t) = \cos\theta(t)\left[a\, r(t)\cos\theta(t) + b\, r(t)\,\mathrm{sen}\,\theta(t)\right] + \cos\theta(t)\, R_1(x,y)$$
$$\mathrm{sen}\,\theta(t)\left[-b\, x(t) + a y(t)\right] + \mathrm{sen}\,\theta(t)\, R_2(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$
$$= a\, r(t) + \rho(r,\theta) \quad \text{CON } \rho(r,\theta) = \cos\theta\, R_1(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + \mathrm{sen}\,\theta\, R_2(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

$$\theta'(t) = \ldots\ldots = \frac{1}{r(t)}\left[-b\, r(t)\right] + \frac{1}{r(t)} w(r,\theta)$$

CON $w(r,\theta) = \cos\theta\, R_2(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) - \mathrm{sen}\,\theta\, R_1(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$

(1_2) PROBAR QUE $\lim\limits_{r\to 0} \frac{\rho(r,\theta)}{r} = 0$ y $\lim\limits_{r\to 0} \frac{w(r,\theta)}{r} = 0$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\rho(r,\theta)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{\cos\theta\, R_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\operatorname{sen}\theta\, R_2(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

como $|\cos\theta|, |\operatorname{sen}\theta| \le 1$ y

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{R_i(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0 \quad i = 1, 2$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{w(r,\theta)}{r} = \text{PROCEDIENDO COMO ARRIBA} = 0$$

IDEA

ESCRIBIR ρ y w EN FUNCIÓN DE R_1 y R_2 SEGÚN (1_1) y USAR QUE $\lim\limits_{(x,y)\to 0} \frac{R_i(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$.

(1_3) SI $a<0$ PROBAR QUE $r(t)$ ES DECRECIENTE y CONCLUIR QUE LA SOLUCIÓN NULA ES ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

IDEA

- $\frac{\rho(r,\theta)}{r} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$

ASI $\exists\, \delta_0 : r<\delta_0 \Rightarrow |\rho(r,\theta)| \le \frac{|a|}{2} r$

- ¿PORQUE $r' \le \frac{a}{2} r$ SI $r<\delta_0$?
- INTEGRAR.

como $\frac{\rho(r,\theta)}{r} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ PARA $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ $\exists\, \delta_0 : 0<r<\delta_0$

$\Rightarrow \left|\frac{\rho(r,\theta)}{r}\right| \le \frac{|a|}{2} \iff |\rho(r,\theta)| \le \frac{|a|}{2} r$.

como $r'(t) = a r(t) + \rho(r,\theta) \underset{r<\delta_0}{\le} a r(t) + \frac{|a|}{2} r \le \frac{a r(t)}{2}$

ASI $\int \frac{r'(t)}{r(t)} dt \le \int \frac{a}{2} \Rightarrow 0 \le r(t) \le k e^{\frac{at}{2}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ YA QUE $a<0$

$\underline{\underline{k\ge 0}}$

ASI LA SOLUCIÓN $(r(t), \theta(t))$, DEL SISTEMA, EN MÓDULO, ES IGUAL A $r(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, LUEGO $(x,y) \equiv 0$ ES ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

(1_4) ¿QUE OCURRE SI $a>0$?

SI $a>0$ como $r'(t) = a r(t) + \rho(r,\theta) \underset{r<\delta_0}{\ge} \frac{a}{2} r(t)$

y ASI $\int \frac{r'(t)}{r(t)} dt \ge \int \frac{a}{2} dt$

$\Rightarrow r(t) \ge k e^{a/2\, t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty \quad a>0$

$\underline{\underline{k>0}}$

LUEGO LAS SOLUCIONES SE SEPARAN DE $(x,y) \equiv 0$ CUANDO $t\to\infty$, LUEGO LA SOLUCION $(x,y) \equiv 0$ ES INESTABLE

15) SI $b>0$ PROBAR QUE

$$\lim_{t\to\infty} \theta(t) = -\infty$$

IDEA
- ¿POR QUÉ $\theta'(t) \leq \frac{b}{2}$?
- INTEGRAR

PROCEDIENDO COMO ANTES COMO $\frac{w(r,\theta)}{r} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. PARA UN CIERTO $0<\delta_0$ PODEMOS

SUPONER QUE $\left|\frac{w(r,\theta)}{r}\right| \leq \frac{|b|}{2}$ SI $r<\delta_0$

Y ASÍ $\theta'(t) = -b + \frac{1}{r} w(r,\theta) \leq \frac{-b}{2}$

INTEGRANDO $\theta(t) \leq -\frac{b}{2}t + k \xrightarrow[t\to\infty]{} -\infty$

16) SI $b<0$ ¿QUÉ OCURRE?

EN ESTE CASO SE TIENE QUE, PROCEDIENDO COMO EN 15),

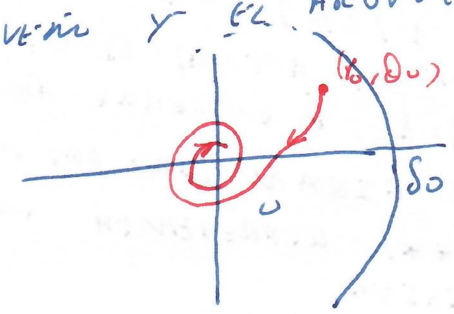
$$\theta(t) \geq \frac{b}{2}t + k \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$$

17) SI $(r(t), \theta(t))$ ES SOLUCIÓN DE $r'(t) = ar + f(r,\theta)$
$\theta'(t) = -b + \frac{1}{r} w(r,\theta)$

CON $a<0$, $b>0$ Y $r(0)$ CERCA DE CERO, DIBUJAR DICHA SOLUCIÓN CERCA DE 0. (FOCO ESPIRAL).

SI $r<\delta_0$, δ_0 SUFICIENTEMENTE PEQUEÑO, HEMOS VISTO QUE $r(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ ($a<0$ 13))

Y $\theta(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} -\infty$ ($b>0$ 15)), ASÍ EL MÓDULO SE HACE PEQUEÑO Y EL ARGUMENTO NO DEJA DE DECRECER



2º SEA EL SISTEMA

$$x'(t) = -x(t) - 6y(t) + x^2(t) + y^2(t)$$
$$y'(t) = 3x(t) + 5y(t) + x^3(t)y(t)$$

DIBUJAR LAS TRAYECTORIAS DEL SISTEMA CERCA DE CERO

IDEA

- CALCULAR LOS AUTOVALORES DE LA MATRIZ DE LA 1ª APROXIMACIÓN LINEAL
- TENER EN CUENTA QUE
$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-6\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-3\\3&2\end{pmatrix}$$
- ¿QUÉ CAMBIO DE VARIABLE ES ADECUADO, PARA PODER USAR 1º?
- USAR 1º

EL SISTEMA $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}-1&-6\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x^2+y^2\\x^3y\end{pmatrix}$.

ESTÁ EN LAS HIPÓTESIS DE 1

$$0 = \begin{vmatrix}-1-\lambda & -6\\ 3 & 5-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 \Rightarrow \lambda = 2 \pm 3i$$

EL CAMBIO DE VARIABLE $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\w\end{pmatrix}$.

NOS DEJA EL SISTEMA

$$(*) \quad \begin{pmatrix}v\\w\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-6\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\w\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(v-w)^2+w^2\\(v-w)^3w\end{pmatrix}$$

ASÍ
$$\begin{pmatrix}v\\w\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}2&-3\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\w\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}(v-w)^2+w^2+(v-w)^3w\\(v-w)^3w\end{pmatrix}.$$

$$\lim_{(v,w)\to 0} \frac{(v-w)^2\{1+(v-w)w\}+w^2}{\|(v,w)\|} = 0$$

$$\text{y} \quad \lim_{(v,w)\to 0} \frac{(v-w)^3w}{\|(v,w)\|} = 0$$

AHORA PODEMOS USAR 1 Y COMO $2>0$ Y $-3<0$ SE SIGUE QUE CERCA DE $(v,w)\equiv 0$ LAS SOLUCIONES DE (*) SON

(**)

$r(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$

$\theta(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$

δ_0

AHORA $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\w\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}v\\w\end{pmatrix}$ $P: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ES LINEAL CONTINUA Y $P(0)=0$; ADEMÁS SI $(v,w)\to\infty \Rightarrow P(v,w)\to\infty$

COMO $|P| = \begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix} = 1$, P CONSERVA ÁNGULO, LUEGO LAS SOLUCIONES (x,y) GIRAN COMO LAS DE (*). ASÍ EL DIBUJO (**) REPRESENTA TAMBIÉN AL SISTEMA ORIGINAL

EJEMPLO DE DINAMICA DE POBLACIONES

SEAN $x(t)$, $y(t)$ DOS POBLACIONES DE ESPECIES DIFERENTES QUE COMPARTEN EL MISMO MEDIO Y COEXISTEN EN EL

$$x'(t) = x(2 - x - y).$$

$$y'(t) = y(2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2}y).$$

REPRESENTAR EL DIAGRAMA DE FASES DE ESTE SISTEMA Y SACAR CONCLUSIONES SOBRE EL MISMO.

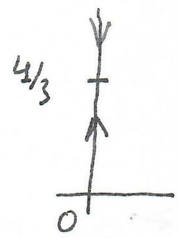
1º] NOS INTERESA TRABAJAR EN $(\mathbb{R}^2)^+$

- $\bar{x}=0$ $\bar{y}=0$ PUNTO DE EQUILIBRIO

- SI $x=0$ $y' = y(2 - \tfrac{3}{2}y)$ ECUACION LOGISTICA

CON $K_y = \dfrac{2}{3/2} = 4/3$ POBLACION DE SOPORTE

ASI



EL EJE Y ESTÁ LLENO DE TRAYECTORIAS CON $(0, 4/3)$ PUNTO DE EQUILIBRIO

- SI $y=0$ $x' = x(2-x)$ ECUACION LOGÍSTICA

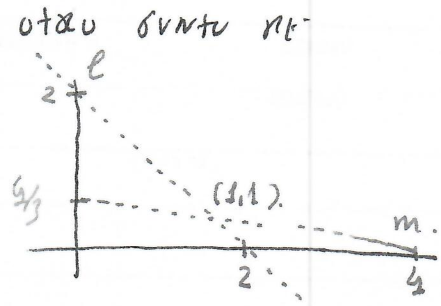
CON $K_x = 2$ POBLACION DE SOPORTE

EL EJE X ESTÁ LLENO DE TRAYECTORIAS CON $(2,0)$ PUNTO DE EQUILIBRIO

- $2 = x+y$
  $2 = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}y$ $\Rightarrow$ $\bar{x}=1$ $\bar{y}=1$ ES OTRO PUNTO DE EQUILIBRIO

$l : 2 - x - y = 0$

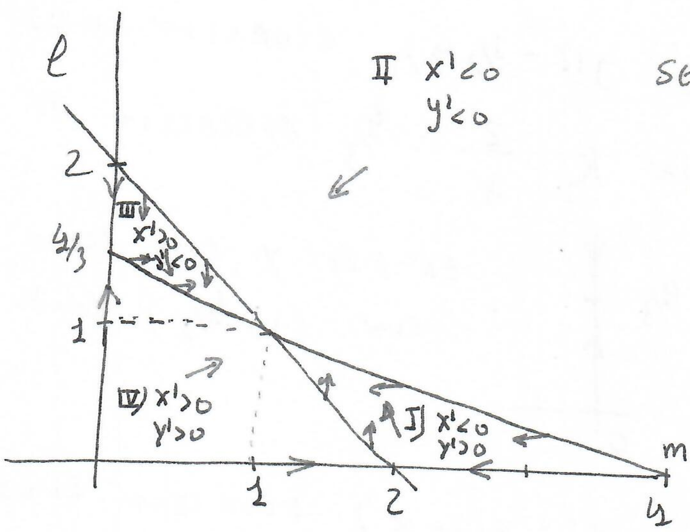
$m : 2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2}y = 0$



•) Como los semiejes $y=0$ $x\geq 0$ y $x=0$ $y\geq 0$ están ocupados por trayectorias se sigue que el conjunto $(\mathbb{R}^2)^+$ es invariante.

2c) Campo de direcciones

Como $x, y \geq 0$ sólo hace falta estudiar los signos de $2-x-y$ y $2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y$



Según este campo de direcciones las regiones I y III son invariantes

(de la región II se puede pasar a la I y III

de la región IV se puede pasar a la I y III)

3º) Estudio de los puntos críticos.

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2-x-y-x & -x \\ -\tfrac{1}{2}y & 2-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{3}{2}y-\tfrac{3}{2}y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2x-y & -x \\ -\tfrac{1}{2}y & 2-\tfrac{1}{2}x-3y \end{pmatrix}$$

Si $(\bar{x},\bar{y})=(0,0)$ $\quad Df(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ luego

— $(\bar{x},\bar{y})=(0,0)$ es un nodo estelar y como $f \in C^{\infty}$, por un teorema que cerca de cero salen trayectorias en todas las direcciones

— $(\bar{x},\bar{y})=(2,0)$ $\quad Df(2,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

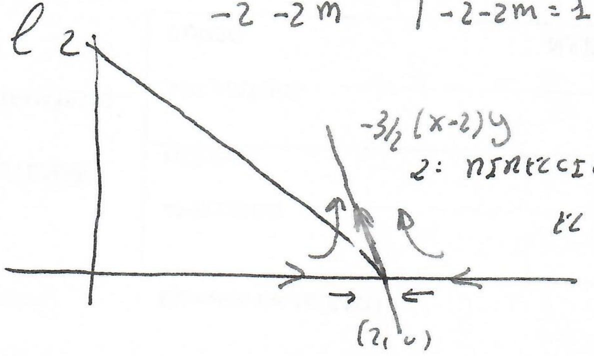
$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda)(1-\lambda) \quad \Big\} \begin{matrix} \lambda=-2 \\ \lambda=1 \end{matrix}$$

es un punto de silla;

luego $(2,0)$ es un punto de silla, como la trayectoria que entra es el eje x como sabemos

La variedad que sale tiene pendiente

$$m = \frac{0+m}{-2-2m} \quad \left\{ \begin{matrix} m=0 \\ ó \\ -2-2m=1 \Rightarrow m=-\tfrac{3}{2} \end{matrix} \right.$$



2: dirección de salida a (2,0)

El resto de trayectorias se alejan de (2,0)

− $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 4/3)$

$$Df(0, 4/3) = \begin{pmatrix} 2 - 4/3 & 0 \\ -1/2 \; 4/3 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ -2/3 & -2 \end{pmatrix}$$

AUTOVALORES $\lambda = 2/3$ Y $\lambda = -2$ LUEGO $(0, 4/3)$ ES UN PUNTO DE SILLA

LA TRAYECTORIA QUE ENTRA ES EL EJE $x = 0$ COMO SABEMOS

LA TRAYECTORIA QUE SALE TIENE PENDIENTE EN $(0, 4/3)$ IGUAL A m

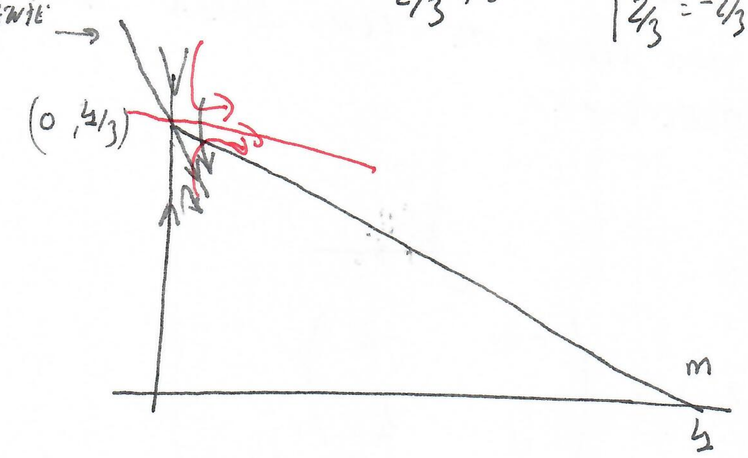
$$m = \frac{-2/3 - 2m}{2/3 + 0m}$$

$m = \infty$ SIRVE, EL $x = 0$, $a_{12} = 0$

$2/3 = -2/3 - 2m \iff \frac{8}{3} m = -2/3 \Rightarrow m = \cancel{-}4$

$m = -\frac{1}{2}$

PENDIENTE −4



− $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ $\quad Df(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

LOS AUTOVALORES ASOCIADOS SON $0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ -1/2 & -3/2-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (1+\lambda)(3/2+\lambda) - 1/2 = \lambda^2 + 5/2\lambda + 3/2 - 1/2 = \lambda^2 + 5/2\lambda + 1$

$$\lambda = \frac{-5/2 \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{2} = \frac{-5/2 \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{-5/2 \pm \frac{3}{2}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{8}{4} = -2 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

ESTAMOS ANTE UN NODO ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

EL AUTOESPACIO ASOCIADO A $\lambda_2 = -1/2$

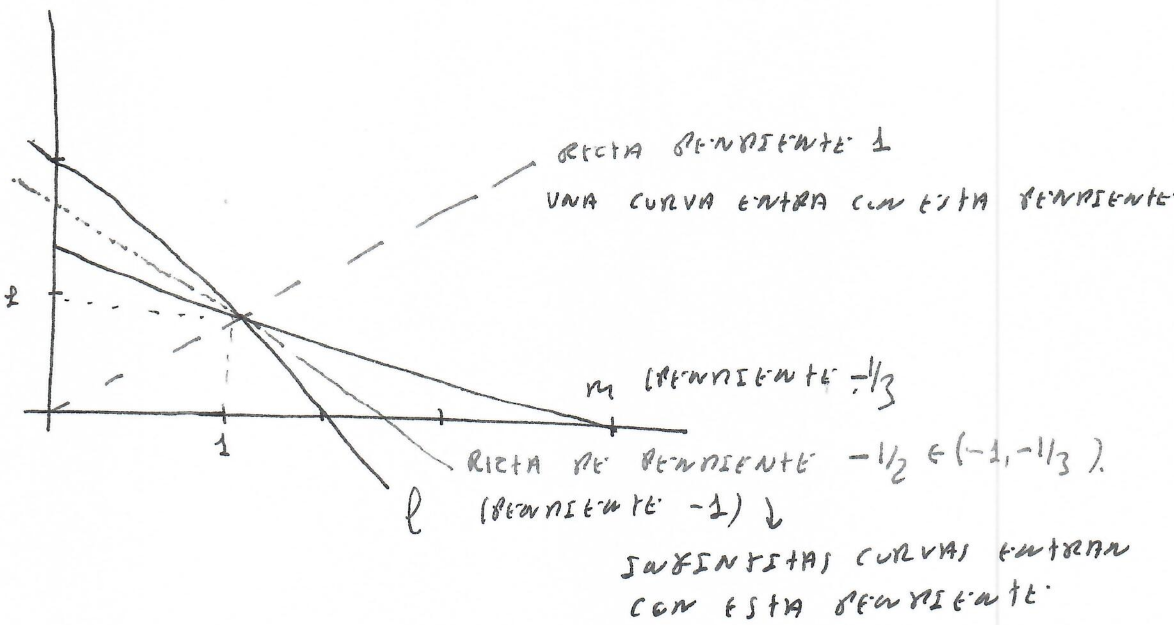
ES $-\frac{1}{2}x - y = 0$ PENDIENTE DE ESTA RECTA ES $-1/2$.

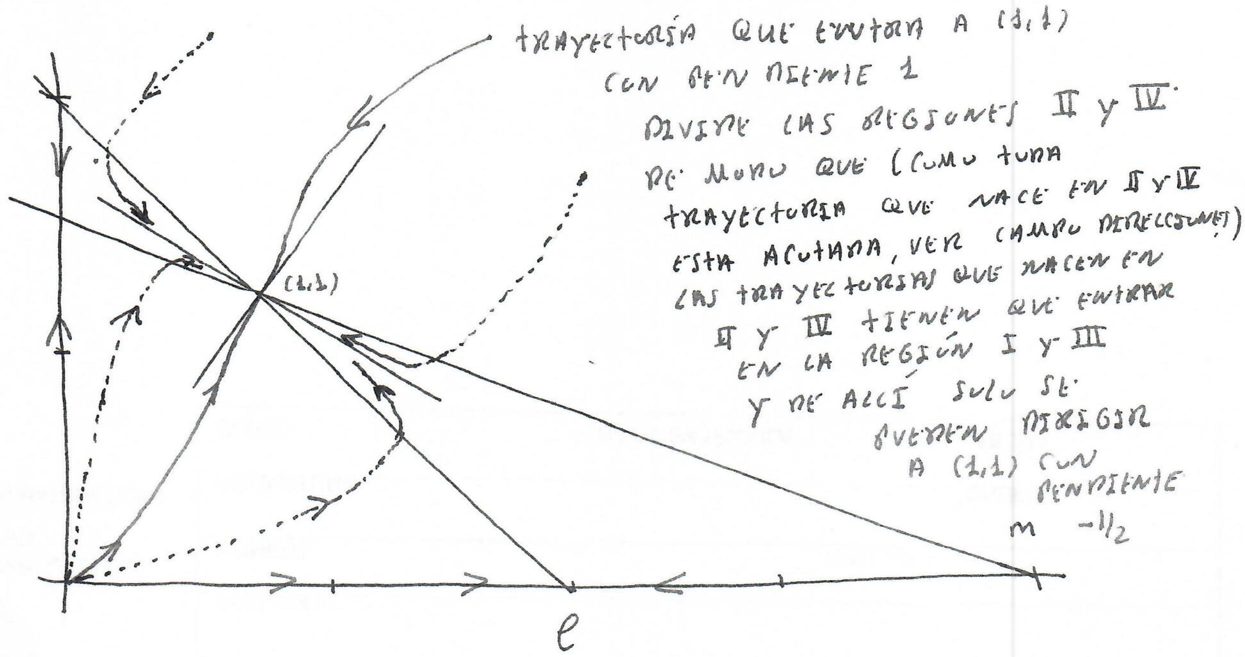
(INFINITAS TRAYECTORIAS ENTRAN A $(1,1)$ CON ESTA PENDIENTE)

EL AUTOESPACIO ASOCIADO A $\lambda_1 = -2$

ES $x - y = 0$ PENDIENTE DE ESTA RECTA ES 1

HAY UNA ÚNICA TRAYECTORIA QUE ENTRA A $(1,1)$ CON ESTA PENDIENTE.





<u>DIAGRAMA DE FASES DEL SISTEMA</u>

PARECE QUE LAS ESPECIES TIENDEN A UN EQUILIBRIO ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS ....

NOMBRE D.N.I. n.º

ASIGNATURA .... GRUPO ....

CURSO N.º DE MATRICULA FECHA

PROBLEMA (EXAMEN JUNIO 06)

SEA EL SISTEMA $x' = x(2-x-y)$ $\qquad x,y \in \overline{U} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq 0\}$

$y' = y(2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y)$

1º) ENCONTRAR LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO DEL SISTEMA Y PROBAR QUE LA REGIÓN U ES INVARIANTE

2º) PROBAR QUE $V(x,y) = x - L_g x + y - L_g y$ ES UNA FUNCIÓN DE LIAPUNOV PARA ES SISTEMA EN U, CON UN MÍNIMO EN UN PUNTO DE EQUILIBRIO

INDIC: CONSIDERAR EL CAMBIO DE VARIABLE $\xi = x-1$ Y $\eta = y-1$ SI OS VEIS EN LA NECESIDAD DE ESTUDIAR EL SIGNO DE UN POLINOMIO DE 2º GRADO EN DOS VARIABLES.

3º) PROBAR QUE DICHO PUNTO DE EQUILIBRIO ATRAE A TODAS LAS TRAYECTORIAS ACOTADAS DEL SISTEMA.

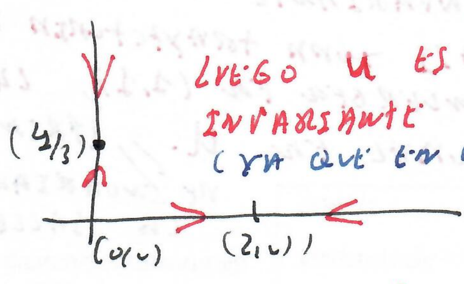
DEM

1º) PUNTOS DE EQUILIBRIO

$(x,y) = (0,0)$

$(0,y) = (0, 4/3)$ SI $x=0$ $y' = y(2-\frac{3}{2}y)$ ES UNA ECUACIÓN LOGÍSTICA CUYAS SOLUCIONES TIENDEN A $4/3$

$(x,0) = (2,0)$ SI $y=0$ $x' = x(2-x)$ ES UNA ECUACIÓN LOGÍSTICA CUYAS SOLUCIONES TIENDEN A 2



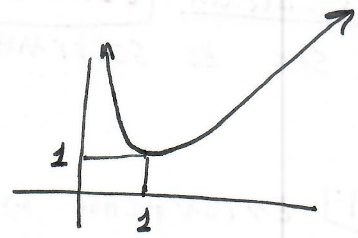
LUEGO U ES INVARIANTE (YA QUE EN UN SISTEMA AUTÓNOMO LAS TRAYECTORIAS NO SE CRUZAN)

SI $x\neq 0, y\neq 0$ $\quad 0 = 2-x-y$, $\ 0 = 2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y$ TIENE POR SOLUCIÓN $(1,1)$

2) Sea $V(x,y) = x - \lg x + y - \lg y \quad x,y > 0$

a) Como $f(r) = r - \lg r$

$f'(r) = 1 - \frac{1}{r} = 0 \iff r = 1$



Entonces $V(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y>0$ y

$\nabla V = 0 \iff (x,y) = (1,1)$, así claramente

V tiene un mínimo absoluto en $U = \{x>0, y>0\}$

(Si quiere tomas $V(x,y) - 2$ como función de Liapunov para que $V(1,1) - 2 = 0$.)

b) $$\frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2 = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(x(2-x-y)\right) + \left(1 - \frac{1}{y}\right) y \left(2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y\right) =$$

$$= (x-1)(2-x-y) + (y-1)\left(2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y\right) =$$

$$= (x-1)\left((1-x) + (1-y)\right) + (y-1)\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}y\right)\right) =$$

$$= \xi(-\xi - \eta) + \eta\left(\frac{1}{2}(-\xi) + \frac{3}{2}(-\eta)\right) =$$

$\xi = x-1$

$\eta = y-1$

$$= -\xi^2 - \xi\eta - \frac{1}{2}\eta\xi - \frac{3}{2}\eta^2 =$$

$$= -\frac{3}{2}\eta\xi - \xi^2 - \frac{3}{2}\eta^2 < 0 \quad \forall \xi\eta \neq (0,0)$$

(Si $|\eta| \geq |\xi|$ y $\eta \cdot \xi < 0$ $\quad \frac{3}{2}|\eta\xi| - \frac{3}{2}\eta^2 = \frac{3}{2}(|\eta\xi| - \eta^2) < 0 \quad \eta^2 \geq |\eta||\xi|$.
Si $|\xi| \geq |\eta|$ y $\eta \cdot \xi < 0$ $\quad \frac{3}{2}|\eta\xi| - \xi^2 - \frac{3}{2}\eta^2 = (|\eta\xi| - \xi^2) + \left(\frac{1}{2}|\eta\xi| - \frac{3}{2}\eta^2\right) < 0$).

Además $\frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2 (x,y) \equiv 0 \iff (x,y) = (1,1)$ en U.

c) Así en la región U que es invariante el único w-límite que puede haber es $(1,1)$, así toda trayectoria acotada que nace en U tiene que converger a $(1,1)$, luego $(1,1)$ es un atractor global en U. (Principio de invariancia de La Salle).

PROBLEMA (EXAMEN SEPTIEMBRE 06)

SEA EL SISTEMA

$$x' = x(2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2}y)$$
$$y' = y(2 - x - y)$$

ENCONTRAR Y CLASIFICAR LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO DEL SISTEMA.

DEM

a) PUNTOS DE EQUILIBRIO, SOLUCIONES DE EL SISTEMA

$$0 = x(2 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2}y)$$
$$0 = y(2 - x - y).$$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}x & -\frac{3}{2}x \\ -y & 2 - x - y - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - x - \frac{3}{2}y & -\frac{3}{2}x \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}$$

- $(0,0)$.
- SI $x=0$ $y=2$
- SI $y=0$ $x=4$
- SI $x,y \neq 0$ $\quad 2 = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}y$, $\quad 2 = x + y$ $\Rightarrow (x,y) = (1,1)$.

b) CLASIFICACIÓN

- $(0,0)$ $\quad Df(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ DOS AUTOVALORES REALES IGUALES Y POSITIVOS. NODO ESTELAR INESTABLE
- $(4,0)$ $\quad Df(4,0) = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ~~PUNTO CRÍTICO NO~~ DOS AUTOVALORES IGUALES Y NEGATIVOS $\lambda = -2$; SOLO UN AUTOVECTOR ~~ESTELAR~~ NODO IMPROPIO. SUMIDERO.
- $(0,2)$ $\quad Df(0,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ DOS AUTOVALORES REALES DISTINTOS Y NEGATIVOS. NODO ASINTÓTICAMENTE ESTABLE
- $Df(1,1) = Df(1,1) = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ DOS AUTOVALORES REALES DISTINTOS DE DISTINTO SIGNO. PUNTO DE SILLA

$$0 = |Df(1,1) - \lambda I| = (\tfrac{1}{2} + \lambda)(1 + \lambda) - \tfrac{3}{2} = \lambda^2 + \tfrac{3}{2}\lambda - 1 \qquad \lambda = \frac{-3/2 \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}}{2} =$$

$$= \lambda = \frac{-3/2 \pm \sqrt{\frac{25}{4}}}{2} = \frac{-3/2 \pm \frac{5}{2}}{2} \begin{cases} \to \lambda_1 < 0 \\ \to \lambda_2 > 0 \end{cases}$$