A ①

ESTABILIDAD EN E.D.O

SEA LA E.D.O.

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

CON $f\ [a,b]\times D \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

CON $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ Y $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ABIERTO CONEXO

$$x_1'(t) = f_1(t, x(t))$$

$$\Longleftrightarrow \quad \vdots$$

$$x_n'(t) = f_n(t, x(t))$$

SOBRE f SE PIDE REGULARIDAD SUFICIENTE PARA QUE EL PROBLEMA DE CAUCHY

$$(1) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad t_0 \in [a,b],\ x_0 \in D$$

TENGA SOLUCIÓN ÚNICA EN UN ENTORNO DE t_0.

SERÁ SUFICIENTE PEDIR $f \in C^1([a,b]\times D)$.

¿QUÉ OCURRE SI LA ECUACIÓN "REAL" QUE BUSCAMOS Y EL DATO INICIAL EXACTO SON

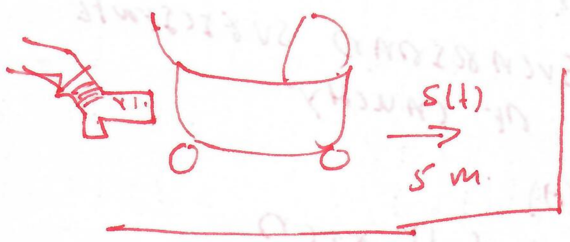
$$(2) \begin{cases} x'(t) = f^*(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_1 \end{cases} \quad f \sim f^* \quad x_0 \sim x_1 \ ?$$

¿LAS SOLUCIONES DE (1) Y (2) SE PARECEN?

ES DECIR SI $\bar{x}$ E $\bar{y}$ SON SOLUCIONES DE (1) Y (2) OCURRIRÁ QUE $\bar{x} \sim \bar{y}$.

EJEMPLOS

UN GAMBERRO DIO UNA PATADA A UN COCHECITO DE NIÑO QUE ESTABA PARADO EN UNA ACERA A 5m DE LA CALZADA. EL COCHECITO SALIÓ DISPARADO HACIA LA CALZADA CON UNA VELOCIDAD DE 2m/s. EN DEFENSA DEL CRÍO SALIÓ UNA FUERZA DE ROZAMIENTO IGUAL A $-km$ DONDE $k=1/3$ Y m ES LA MASA DEL COCHECITO. SABIENDO QUE EN LA CALZADA HABÍA UN INTENSO TRÁFICO. ¿SE SALVÓ EL NIÑO? ¿POR QUÉ LA SITUACIÓN DEL PROBLEMA NO ES REAL?



$F = m\,v'(t)$ 2ª LEY DE NEWTON

$F = -km = -\frac{1}{3} m.$

ASÍ

$$\begin{cases} m\,v'(t) = -\frac{1}{3} m. \\ v(0) = 2. \end{cases}$$

INTEGRANDO $v(t) = -\frac{1}{3} t + 2$

AHORA $s(t)$ COCHECITO EN MOVIMIENTO

$$\begin{cases} s'(t) = -\frac{1}{3} t + 2 \\ s(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{INTEGRANDO}$$

$s(t) = -\frac{1}{6} t^2 + 2t$

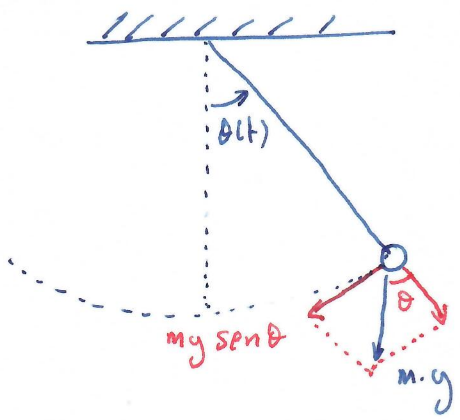
EL COCHE SE MUEVE HASTA QUE $v(t)=0 \iff t=6$

$y\ s(6) = -6+12 = 6 > 5$!!

MORIRÍA.

(*) NOTA EL PROBLEMA NO TIENE SENTIDO FÍSICO (¿NI MORAL??) YA QUE $v(t)<0$ SI $t>6$ LUEGO EL COCHE VOLVERÍA

EJEMPLO — ECUACIÓN DEL PÉNDULO SIN ROZAMIENTO.



CONSIDERANDO ESTE (EL PÉNDULO) COMO UN PUNTO MATERIAL DE MASA m SUSPENDIDO DE UNA CUERDA l CUYOS MOVIMIENTOS TIENEN LUGAR A LO LARGO DE UNA CIRCUNFERENCIA DEL PLANO (DESPRECIAMOS EL ROZAMIENTO)

NOTA SI $\theta(t)$ VIENE DADO EN RADIANES Y l ES LA LONGITUD DEL PÉNDULO ASÍ

$$s(t) = l\,\theta(t)$$

ES EL ARCO RECORRIDO POR EL PÉNDULO Y LA 2ª LEY DE NEWTON ESTABLECE

$$m\, s''(t) = m\, l\, \theta''(t) = -mg \operatorname{sen}\theta.$$

ASÍ $\boxed{\theta''(t) = -\frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta(t)}$

SI ANTE ESTE PROBLEMA PENSAMOS

QUE $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \xrightarrow[\theta \to 0]{} 1$

ENTONCES

$$(1)\quad \begin{cases} \theta''(t) = -\frac{g}{l} \operatorname{sen}\theta(t) \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

CON θ_0 PEQUEÑO

SERÁ PARECIDO A

$$(2)\quad \begin{cases} \theta''(t) = -\frac{g}{l}\, \theta(t) \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

ESENCIALMENTE ESTO ES LO QUE SE HACE EN
$x' = f(x)$
$f(x_0) = 0$
$\approx$
$x' = Df(x_0)\,x$
$Df(x_0)(0) = 0$

(2) SE PUEDE RESOLVER (ES LINEAL). TÉCNICAMENTE ES MÁS FÁCIL TRABAJAR CON (2) QUE CON (1)

¿PERO LAS SOLUCIONES SE PARECEN?

PROBLEMAS DE ESTE TIPO SE RESUELVEN TEÓRICAMENTE CON LOS TEOREMAS DE DEPENDENCIA CONTINUA, INCLUIDOS LAS VARIACIONES DEL DATO INICIAL.

CONCEPTO DE ESTABILIDAD.

SEA EL PROBLEMA

① $x'(t) = f'(t, x(t))$ $f\ \mathbb{R}\times D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

SUFICIENTEMENTE REGULAR PARA QUE EXISTAN SOLUCIONES ÚNICAS

SEA $\bar{x}(t)$ UNA SOLUCIÓN DE ① CON $t\in[t_0,\infty)$.

CON DATO INICIAL $\bar{x}(t_0) = x_0$

SEA $\bar{y}(t)$ UNA SOLUCIÓN DE ② CON $t\in[t_0,\infty)$

CON DATO INICIAL $\bar{y}(t_0) = y_0$.

¿SI $x_0 \sim y_0$ OCURRIRÁ QUE $\bar{x}\sim\bar{y}$ EN TODO $[t_0,\infty)$?

PENSEMOS EN EL SISTEMA SOLAR. Y EN UN SISTEMA DE ECUACIONES ① QUE DESCRIBA SU MOVIMIENTO. SUPONGAMOS QUE CON DATOS EXPERIMENTALES x_0 NOS SALE UNA SOLUCIÓN $\bar{x}_0$. HABRÁ ERRORES AL MEDIR x_0 DE ORDEN ε, ENTONCES SI

$x_1 \in B(x_0,\varepsilon)$

LA SOLUCIÓN $\bar{x}_1$ CORRESPONDIENTE SERÁ

$\bar{x}_0 \sim \bar{x}_1$ $\forall t$ ¿

DIVERGERÁN.

ESTE PROBLEMA CLARO DEPENDE LA ESTABILIDAD DE UN SISTEMA, COMO EL SOLAR, EN EL TIEMPO.

LA RESPUESTA CREO QUE ES QUE SÍ (ARNOLD.)

VAMOS A TRATAR ES ~~FOR~~ PROBLEMAS.

SEA $x'(t) = f(t, x(t))$. $\underline{(1)}$ $f: \mathbb{R} \times D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

f SUFICIENTEMENTE REGULAR.

(AL MENOS $f \in C^1(\mathbb{R} \times D)$)

DEF a) UNA SOLUCIÓN $\varphi(t)$ DEL SISTEMA (1) SE LLAMA ESTABLE (O ESTABLE EN EL SENTIDO DE LIAPUNOV) SI $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ TAL QUE $\forall$ SOLUCIÓN y DE (1) CON VALORES INICIALES

$$\| y(t_0) - \varphi(t_0) \| < \delta(\varepsilon)$$

NORMA 2 (EUCLÍDEA) O MEJOR $\|\ \|_\infty$

ENTONCES

$$\| y(t) - \varphi(t) \| < \varepsilon \quad \forall\ t > t_0 \qquad (2)$$

$|y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ $\forall i = 1 \ldots n$.

b) SE DICE QUE φ ES INESTABLE SI NO ES ESTABLE (SOLUCIONES RARAMENTE IMPORTANTES EN LOS CASOS PRÁCTICOS (¡EL EFECTO MARIPOSA NO ES NADA PRÁCTICO!)).

c) UNA SOLUCIÓN $\varphi(t)$ DEL SISTEMA (1) SE LLAMA ASINTÓTICAMENTE ESTABLE SI ES ESTABLE Y $\exists$ $\delta_1 > 0$ TAL QUE SI

$$\| y(t_0) - \varphi(t_0) \| < \delta_1$$

ENTONCES $\lim_{t \to \infty} \| y(t) - \varphi(t) \| = 0$.

OBSERVACION

EL ANÁLISIS DE LA ESTABILIDAD DE CIERTA SOLUCIÓN $\bar{x}$ DE LA ECUACION

$$x' = f(t, x)$$

SE PUEDE REDUCIR AL ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DE LA SOLUCIÓN TRIVIAL $y \equiv 0$, ES DECIR AL PUNTO DE REPOSO, A TRAVES DE UN CAMBIO DE COORDENADAS

DEM SEA $x' = f(t, x)$ Y SE $\bar{x}$ SOLUCIÓN.

DE LA ECUACION

SEA EL CAMBIO DE VARIABLE

$$y = x - \bar{x}$$

$$\boxed{\text{ASI } y' = x' - \bar{x}' = f(t, y + \bar{x}) - \bar{x}'} \quad (2) \quad [y'(t) = F(t, y)]$$

LA ECUACION (2) VERIFICA QUE $y \equiv 0$

$$0 = f(t, \bar{x}) - \bar{x}' \qquad \boxed{\text{ASI } F(t, 0) = 0}$$

Y CLARAMENTE LA ESTABILIDAD DE $y \equiv 0$ EN 2 ES EQUIVALENTE A LA DE $\bar{x}$ EN LA ECUACION ORIGINAL.

ESTE ES EL MOTIVO POR LO QUE SOLO ES NECESARIO ESTUDIAR LA ESTABILIDAD (INCLUSO SOLO DEFINIRLA) EN SOLUCIONES CONSTANTES Ó PUNTOS CRÍTICOS.

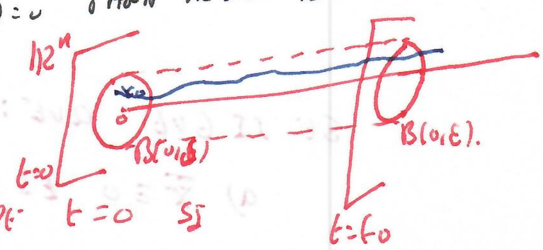
EJERCICIOS

SEA $x' = f(t,x)$ CON

a) f SUFICIENTEMENTE REGULAR PARA QUE HAYA SOLUCIÓN ÚNICA Y DEPENDENCIA CONTINUA

b) $f(t,0) \equiv 0 \quad \forall t \in [0,\infty)$.

NOTA SI $\bar{x}(t)$ ES SOLUCIÓN Y $\bar{x}(t_0)=0$ PARA ALGÚN $t_0 \neq 0$ ENTONCES $\bar{x} \equiv 0$ POR a)



DEF LA SOLUCIÓN $\bar{x} \equiv 0$ SE DICE:

i) ESTABLE A LA DERECHA DE $t=0$ SI $\forall \varepsilon > 0$ Y $\forall t_0 \geq 0$ $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ TAL QUE

SI $|x_0| < \delta$ $\begin{cases} \exists\, \varphi(t, t_0, x_0) \ \forall t \geq t_0 \\ \text{Y} \ \|\varphi(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 \end{cases}$

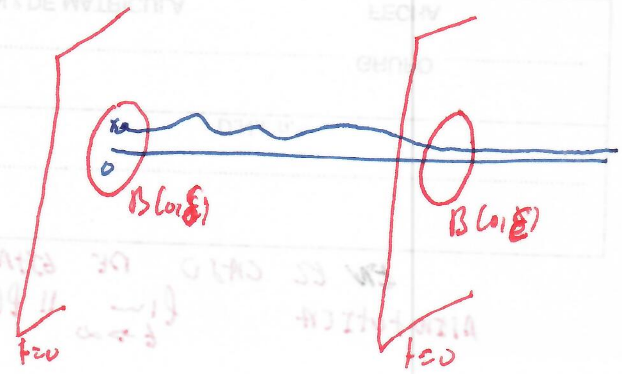
ii) UNIFORMEMENTE ESTABLE A LA DERECHA DE $t=0$ SI $\forall \varepsilon > 0$ $\forall t_0 \geq 0$ $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon)$ TAL QUE SI $|x_0| < \delta$ Y $\varphi(t,t_0,x_0)$ SOLUCIÓN $\forall t \geq t_0$ ENTONCES $\|\varphi(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$

iii) ASINTÓTICAMENTE ESTABLE SI ES ESTABLE A LA DERECHA DE $t=0$ Y $\exists\, \delta_1(t_0)$ TAL QUE

SI $|x_0| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} |\varphi(t,t_0,x_0)| = 0$

iv) UNIFORMEMENTE ASINTÓTICAMENTE ESTABLE SI ES UNIFORMEMENTE ESTABLE Y $\exists\, \delta_1$ TAL QUE SI $|x_0| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|\varphi(t,t_0,x_0)\| = 0 \quad \forall t_0 \geq 0$.

v) INESTABLE SI NO ES ESTABLE



LEMA

SI $\begin{cases} x' = f(x) \\ f(0)=0 \end{cases}$ SISTEMA AUTÓNOMO

O BIEN SI

$\left\{ x' = f(t,x) \right.$ CON $f(t,0)=0 \ \forall t \geq 0$ Y $f(t+w,x) = f(t,x) \ \forall t, \ w>0$

SE SIGUE QUE:

a) $\bar{x} \equiv 0$ ESTABLE $\Rightarrow$ UNIFORMEMENTE ESTABLE

b) $\bar{x} \equiv 0$ ASINTÓTICAMENTE ESTABLE $\Rightarrow$ UNIFORMEMENTE ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

ESTE LEMA JUSTIFICA LAS DEFINICIONES DE ESTABILIDAD DE PUNTOS CRÍTICOS EN SISTEMAS AUTÓNOMOS QUE SE HAN DADO.

DEM SI $\begin{cases} x' = f(x) \\ f(0)=0 \end{cases}$

Y $x \equiv 0$ ES ESTABLE

PARA ESO PARA $t=0$ $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon,0)$ TAL QUE SI $|x_0| < \delta(\varepsilon,0)$

$\Rightarrow \|\varphi(t,0,x_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0$

SI $t = t_0$ SEA $\delta = \delta(\varepsilon,t_0) \overset{DEF}{=} \delta(\varepsilon,0)$. SI $\varphi(t,t_0,x_0)$ ES LA SOLUCIÓN CON $\varphi(t_0) = x_0$ CON $|x_0| < \delta$ $t \geq 0$

ENTONCES POR SER UN SISTEMA AUTÓNOMO (CON UNICIDAD)

$$\varphi(t,t_0,x_0) = \varphi(t-t_0,0,x_0)$$

Y COMO $\|\varphi(t-t_0,0,x_0)\| \leq \varepsilon \quad \forall\, t-t_0 \geq 0$

$$\Rightarrow \|\varphi(t,t_0,x_0)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

SI $|x_0| < \delta_1$

EN EL CASO DE ESTABILIDAD ASINTÓTICA $\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t,t_0,x_0)\| = \lim_{t\to\infty} \|\varphi(t-t_0,0,x_0)\| = 0 \quad \forall\, t-t_0 \geq 0$