MÉTODO DIRECTO O 2º MÉTODO DE LIAPUNOV

EL SIGUIENTE MÉTODO DE ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DE LA SOLUCIÓN CONSTANTE $\bar{x} \equiv 0$, PARA UN SISTEMA GENERAL

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

$f: \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$ SUFICIENTEMENTE REGULAR. Y $f(t, 0) = 0 \ \forall t$

SE DEBE A LIAPUNOV.; EN EL CUAL NO SE NECESITA CONOCER LA SOLUCIÓN GENERAL DEL SISTEMA

DEFINICIÓN.

SEA $V: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ UNA FUNCIÓN DIFERENCIABLE

TAL QUE $V(x) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \quad \forall x \in D$

Y TAL QUE $V(x) = 0 \iff x = 0.$

ES SUFICIENTE CON ESTABLECER V EN UN ENTORNO DE 0, PARA ESTUDIAR LA ESTABILIDAD DE $x \equiv 0$

a) SI $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1 \ldots x_n) \leq 0 \quad \forall t \geq 0$ Y $\forall x \in D$

SE DICE QUE V ES UNA FUNCIÓN DE LIAPUNOV. (ASOCIADO AL SISTEMA $x'(t) = f(t, x(t))$).

b) SI $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1 \ldots x_n) \leq 0 \quad \forall t \geq 0$ Y $\forall x \in D$

Y $\forall \delta > 0 \ \exists \beta < 0$ TAL QUE

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1 \ldots x_n) \leq \beta < 0 \quad \begin{cases} \forall x \in D \setminus B_\delta(0) \\ \forall \|x\| > \delta \end{cases}$$

SE DICE QUE V ES UNA FUNCIÓN DE LIAPUNOV ESTRICTA.

VAMOS A PROBAR SENDOS TEOREMAS QUE DICEN QUE SI EXISTE UNA FUNCIÓN DE LIAPUNOV ENTONCES $x \equiv 0$ ES ESTABLE Y SI ADEMÁS LA FUNCIÓN DE LIAPUNOV ES ESTRICTA, ENTONCES $x \equiv 0$ ES ASINTÓTICAMENTE ESTABLE.

EJEMPLOS

SEA (1) $\begin{cases} x' = y + \mu x(x^2+y^2) \\ y' = -x + \mu y(x^2+y^2) \end{cases}$ $\mu \in \mathbb{R}$

LA LINEALIZACION DE ESTE SISTEMA

(2) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

TIENE POR AUTOVALORES $\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm i$

(COMO $Re\,\lambda = 0$ NO PODEMOS INFERIR NADA SOBRE LA SOLUCION NULA DE (1), SABIENDO QUE EN (2) $(x,y) \equiv 0$ ES UN CENTRO.

SEA $V(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0$ Y $V(x,y) = 0 \iff x = y = 0$

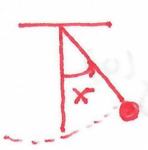
$$\frac{\partial V}{\partial x}\left(y + \mu x(x^2+y^2)\right) + \frac{\partial V}{\partial y}\left(-x + \mu y(x^2+y^2)\right) =$$

$$\cancel{2xy} + 2x\,\mu x(x^2+y^2) \cancel{- 2yx} + 2y\,\mu y(x^2+y^2) =$$

$$= \mu(x^2+y^2)^2 \leq 0 \quad \text{SI } \mu < 0.$$

ASI V ES UNA FUNCION DE LIAPUNOV, POR TANTO $(x,y) \equiv 0$ ES UN CENTRO ESTABLE EN (1)

EJEMPLO LA ECUACION DEL PENDULO CON ROZAMIENTO ES $x'' = -cx' - \operatorname{sen} x$ DONDE x ES EL ANGULO QUE FORMA EL PENDULO CON LA VERTICAL Y $c = cte$, $-cx'$ EL FACTOR DE ROZAMIENTO



ASI $\begin{cases} x' = y \\ y' = -\operatorname{sen} x - cy \end{cases}$

ES UN SISTEMA EQUIVALENTE DONDE y ES LA VELOCIDAD ANGULAR

SEA $V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + 1 - \cos x \geq 0$ {ENERGIA DEL SISTEMA}

(*) FISICAMENTE AL HABER ROZAMIENTO LA SOLUCION ESTACIONARIA DEBERIAN ASINTOTICAMENTE ESTABLE; AHORA NUESTRA FUNCION DE LIAPUNOV (LA ENERGIA) SOLO NOS PERMITE DETERMINAR ESTABILIDAD YA QUE $-cy^2 \leq 0$ CERCA DE $(0,0)$.

$$\frac{\partial V}{\partial x} y + \frac{\partial V}{\partial y}(-\operatorname{sen} x - cy) = \cancel{\operatorname{sen} x\, y} + \cancel{y \operatorname{sen} x} - cy^2 \leq 0$$

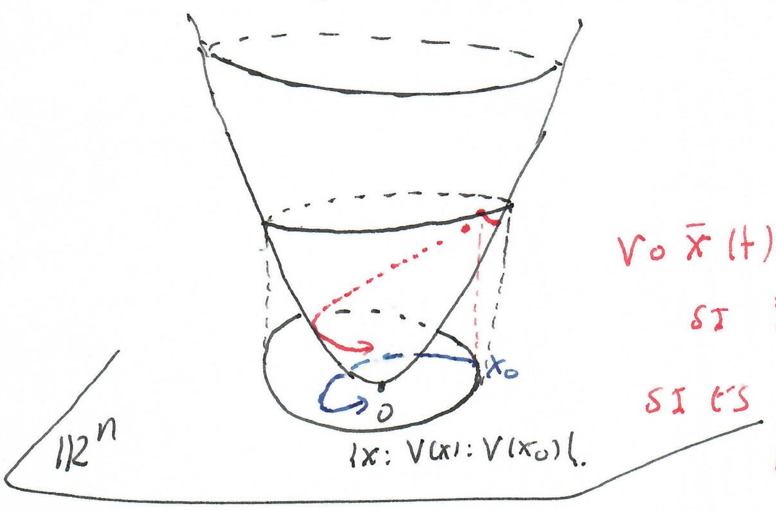
Y SI ~~...~~ $|y| > \delta \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} \leq -c\delta^2$. LUEGO 0 ES SOLUCION ASINTOTICAMENTE ESTABLE (*)

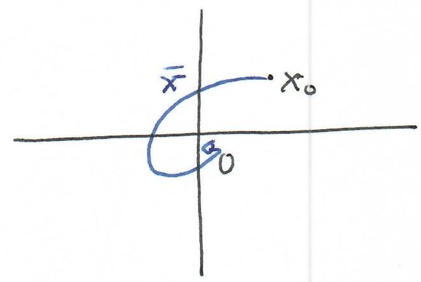
OBSERVACION

La construcción de una función de Liapunov para un problema dado no sigue ningún método universalmente válido, así que la experiencia y alguna intuición feliz ayuda a encontrarlas. Sin embargo no surgen de la nada; Liapunov, físico e ingeniero, concibió el método en la medida que en muchos sistemas físicos la energía juega el papel de función de Liapunov.

La idea geométrica es la que sigue

$V: \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ con un mínimo en $x=0$





$V\circ\bar{x}(t)$ debe decrecer.

Si $\bar{x} \rightrightarrows 0$ (i.e. $(V\circ\bar{x})' \leq 0$)

Si es así si se considera la curva de nivel

$$\{x\in\mathbb{R}^n : V(x)=V(x_0)\}$$

Se tiene que tener que $\{x\in\mathbb{R}^n : V(x)\leq V(x_0)\}$ sea invariante para las curvas solución de $x'=f(t,x)$, es decir

si $\bar{x}(t_0)=x_1\in\{x\in\mathbb{R}^n : V(x)\leq c\} \Rightarrow$ si $\bar{x}\rightrightarrows 0$

$\bar{x}(t)\in\{x\in\mathbb{R}^n : V(x)\leq c\}$.

TEOREMA (DE LIAPUNOV SOBRE ESTABILIDAD)

SI EXISTE UNA FUNCIÓN DE LIAPUNOV V PARA EL SISTEMA $x'(t) = f(t,x(t))$, $f(t,0)=0$ $\forall t \geq 0$, ES DECIR

- $V(x) \geq 0$ y $V(x)=0 \iff x=0$
- $\sum \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \cdot f_i(t,x) \leq 0$ CUANDO $t \geq t_0$,

ENTONCES LA SOLUCIÓN ESTACIONARIA $x \equiv 0$ ES ESTABLE

DEM **OBSERVACIÓN**

SI $\bar{x}$ ES SOLUCIÓN DE $x'(t) = f(t, x(t))$.

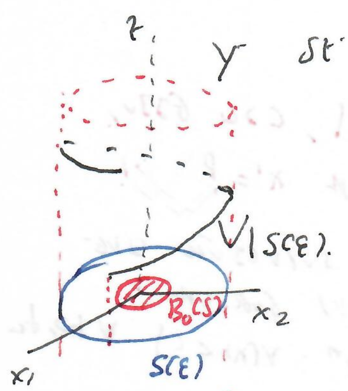
ENTONCES $\frac{\partial V(\bar{x}(t))}{\partial t} = \nabla V(\bar{x}(t)) \cdot \bar{x}'(t) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\bar{x}(t))\, \bar{x}'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\bar{x}(t)) \cdot f_i(t, \bar{x}(t)) \leq 0$$

ES DECIR LA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE REAL QUE TOMA VALORES REALES $V(\bar{x}(t))$. ES DECRECIENTE $\forall t \geq t_0$.

SEA $\varepsilon > 0$ Y SEA $B_0(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \varepsilon\}$.

Y SEA $S(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \varepsilon\}$.



V ES CONTINUA Y SOBRE $S(\varepsilon)$ COMPACTO ALCANZA UN MÍNIMO r

$$r = \min\{V(x) : x \in S(\varepsilon)\} > 0$$

YA QUE $V(x) = 0 \iff x = 0$

POR SER V CONTINUA EN 0 $\exists \delta > 0$, $\underline{\delta < \varepsilon}$, TAL QUE $\forall x \in B_0(\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \delta\}$ SE TIENE QUE $V(x) < r$

SEA $x_0 \in B_0(\delta)$ Y SEA $\bar{x}(t)$ LA SOLUCIÓN DE PROBLEMA DE CAUCHY

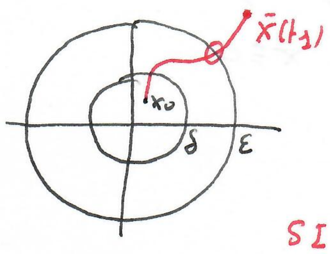
$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$(V\circ \bar{x})'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\bar{x}(t))\cdot f_i(t,\bar{x}(t)) \leq 0$$

ASÍ $V\circ\bar{x}$ ES NO CRECIENTE EN $[t_0,\infty)$

POR LO TANTO $\boxed{V(\bar{x}(t)) \leq V(\bar{x}(t_0)) = V(x_0) < r}$ (*) $\forall t\in[t_0,\infty)$

ASÍ $\|\bar{x}(t)\| < \varepsilon \quad \forall t\in[t_0,\infty)$



POR SER $\bar{x}$ CONTINUA EN $[t_0,\infty)$

$\|\bar{x}\|$ ES CONTINUA EN $[t_0,\infty)$

SI EXISTIESE $t_1\in[t_0,\infty)$ CON $\bar{x}(t_1)\geq\varepsilon$

COMO $\|\bar{x}(t_0)\| = \|x_0\| < \delta < \varepsilon$, ASÍ POR EL TEOREMA DE BOLZANO EXISTE $s\in[t_0,t_1]$

CON $\|\bar{x}(s)\| = \varepsilon$, PERO ENTONCES

$V(\bar{x}(s)) \geq r$ CONTRADICCIÓN CON ESTRICTA

POR LO TANTO LA SOLUCIÓN $x\equiv 0$ ES ESTABLE (UNIFORMEMENTE ESTABLE; COMO SE VE δ SÓLO DEPENDE DE ε Y NO DEL t_0 ELEGIDO).

OBSERVACIÓN SI V ES UNA FUNCIÓN DE LIAPUNOV ENTONCES $\{x\in\mathbb{R}^n : V(x)<c\}$, $c>0$ FIJO, ES UN CONJUNTO INVARIANTE RESPECTO A $x'=f(t,x)$

R SI $x_0\in\{x\in\mathbb{R}^n : V(x)<c\}$ Y $x(t_0)=x_0$ SOLUCIÓN QUE COMIENZA EN $\{x\in\mathbb{R}^n : V(x)<c\}$. ENTONCES POR LA DEMOSTRACIÓN DE ARRIBA $x(t)\in\{x\in\mathbb{R}^n : V(x)<c\}$ $\forall t\geq t_0$

TEOREMA (DE LIAPUNOV SOBRE LA ESTABILIDAD ASINTÓTICA)

SI EXISTE UNA FUNCIÓN V DE LIAPUNOV ESTRICTA PARA EL SISTEMA $x'(t) = f(t, x(t))$, $f(t,0)=0$ $\forall t\geq 0$, ES DECIR.

- $V(x) \geq 0$ $\forall x \in D$ Y $V(x)=0 \iff x=0$.

- $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1 x_2 \dots x_n) \leq 0$ TAL QUE $\forall \delta>0$ $\exists -\beta<0$

CON $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1 x_2 \dots x_n) \leq -\beta < 0$ $\forall x \in D \setminus B_0(\delta)$,

ENTONCES LA SOLUCIÓN ESTACIONARIA $x\equiv 0$ ES ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

DEM. COMO SE CUMPLEN LAS CONDICIONES DEL TEOREMA DE LIAPUNOV SOBRE ESTABILIDAD $x\equiv 0$ ES UNA SOLUCIÓN ESTABLE, e. d.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon)>0$ TAL QUE $\forall x_0 \in B_0(\delta)$.

Y PARA LA SOLUCIÓN $\bar{x}(t)$ DE $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \|\bar{x}(t)\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$

ADEMÁS SOBRE ESTA SOLUCIÓN

$$\frac{\partial V \circ \bar{x}(t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\bar{x}(t))\, f_i(t, \bar{x}(t)) \leq 0.$$

LUEGO LA FUNCIÓN $V\circ\bar{x}$ ES NO CRECIENTE Y MAYOR QUE CERO PARA $t\geq t_0$, ASÍ EXISTE

$$\lim_{t\to\infty} V\circ\bar{x}(t) = \alpha \ \left(= \inf_{t\geq t_0} V\circ\bar{x}(t)\right)$$

HAY QUE PROBAR QUE $\alpha = 0$

SI $\alpha > 0$, POR SER V CONTINUA, SE SIGUE QUE $\|\bar{x}(t)\| \geq \delta_1 > 0$ $\forall t \geq t_0$ (EN OTRO CASO SI $\exists\, t_n \to \infty$ CON $\|\bar{x}(t)\| \downarrow 0 \Rightarrow V\bar{x}(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ Y ASÍ $\alpha=0$).

$\exists\, \beta>0$ CON $(V\circ\bar{x})'(t) < -\beta$

ASÍ $\int_{t_0}^{t} V\circ\bar{x}'(t)\,dt \leq \int_{t_0}^{t} -\beta\, dt$

LUEGO $V\circ\bar{x}(t) - V\circ\bar{x}(t_0) \le -\beta(t-t_0)$

Y $V\circ\bar{x}(t) \le V\circ\bar{x}(t_0) - \beta(t-t_0)$

ASÍ CUANDO $t\to\infty$ $V\circ\bar{x}(t) < 0$

LO QUE CONTRADICE QUE $V \ge 0$, LUEGO $\alpha = 0$.

(*) DE AQUÍ SE SIGUE QUE

$$\lim_{t\to\infty} \|\bar{x}(t)\| = 0$$

SI NO FUESE ASÍ $\exists\, r < \varepsilon$ (EL ε DE LA ESTABILIDAD $\|\bar{x}(t_0)\| = \|x_0\| \le \varepsilon$)

Y $(t_n)_{n=1}^{\infty} \uparrow \infty$ CON $\|\bar{x}(t_n)\| > r > 0$.

SEA EL COMPACTO $\{x\in\mathbb{R}^n : r \le \|x\| \le \varepsilon\} = K$

POR SER V CONTINUA

$\exists\, x_1, x_2 \in K$ CON

$V(x_1) \le V(x) \le V(x_2)$ $\forall x\in K$

$V(x_1)$ ES UN MÍNIMO Y $V(x_1) > 0$ (YA QUE $x=0 \notin K$ Y $x=0$ ES EL ÚNICO PUNTO DONDE SE ANULA V).

AHORA $V\circ\bar{x}(t_n) \ge V(x_1)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

LO QUE CONTRADICE QUE $\lim_{n\to\infty} V\circ\bar{x}(t_n) = 0$

(*) COMO $\alpha=0$, ASÍ $\lim_{t\to\infty}\|\bar{x}(t)\|=0$ LO QUE PRUEBA QUE $x\equiv 0$ ES ASINTÓTICAMENTE ESTABLE (ES UNIFORMEMENTE ASINTÓTICAMENTE ESTABLE YA QUE $\delta(\varepsilon)>0$ ELEGIDO PARA QUE $x_0 \in B_0(\delta(\varepsilon))$ NO DEPENDE DE t_0!

OBSERVACIÓN: EN EL TEOREMA ANTERIOR SOLO SE NECESITA QUE $\frac{\partial V \circ \overline{x}(t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t,x)$

ESTE ACOTADA EN UN ANILLO $\overline{B_0(\varepsilon)} - B_0(\delta_1)$ / $\varepsilon > \delta_1 > 0$, YA QUE COMO $x \equiv 0$ ES ESTABLE LAS SOLUCIONES QUE EMPIEZAN CERCA DE $x = 0$ NO SOBREPASAN EN NORMA $\|\overline{x}(t)\| \leq \varepsilon$.

LEMA SEA $V : B_0(R) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ CON

$$V \in C^1(B_0(R)) \quad y \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot f_i(x) < 0$$

$\forall x \in B_0(R) \setminus \{0\}$. DONDE $f : B_0(R) \to \mathbb{R}^n$. f CONTINUA. ENTONCES $\forall \varepsilon, \delta_1 > 0$ CON $R > \varepsilon > \delta_1$ EXISTEN α Y $\beta > 0$ CON

$$-\alpha \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x) \leq -\beta < 0 \quad \forall x \in \overline{B_0(\varepsilon)} - B_0(\delta_1).$$

DEM COMO $V \in C^1(B_0(R))$ SE SIGUE QUE

$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i$ ES CONTINUA EN $B_0(R)$

COMO $\overline{B_0(\varepsilon)} - B_0(\delta_1) \subseteq B_0(R)$ Y ES COMPACTO

$\exists$ A Y B CON

$$A \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \cdot f_i(x) \leq B \quad \forall x \in \overline{B_0(\varepsilon)} - B_0(\delta_1).$$

COMO $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) < 0 \quad \forall x \in B_0(R)$ SE SIGUE QUE $A, B \leq 0$.

$A = -\alpha$ Y $B = -\beta$.

AHORA $\beta > 0$, SI NO, SI $\beta = 0$ Y COMO UNA FUNCIÓN CONTINUA SOBRE UN COMPACTO ALCANZA SU SUPREMO $\exists x_0 \in \overline{B_0(\varepsilon)} - B_0(\delta_1)$ CON $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x_0) f_i(x_0) = 0$ LO QUE CONTRADICE LA HIPÓTESIS.

COROLARIO SEA UN SISTEMA AUTÓNOMO

$x'(t) = f(x(t))$. $f(0)=0$ Y

CON $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

SUFICIENTEMENTE REGULAR.

SEA V UNA FUNCIÓN DE LIAPUNOV $V: B_0(R) \to \mathbb{R}$.

1) $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in B_0(R)$ CON $V(x) = 0 \iff x = 0$

2) $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \cdot f_i(x) < 0 \quad \forall x \in B_0(R)$.

ENTONCES $x \equiv 0$ ES UNA SOLUCIÓN ASINTÓTICAMENTE ESTABLE.

DEM POR EL LEMA ANTERIOR V VERIFICA LAS HIPÓTESIS DEL TEOREMA DE LIAPUNOV SOBRE ESTABILIDAD ASINTÓTICA

Respecto de la Inestabilidad se tiene el siguiente resultado

TEOREMA (DE CHETAEV SOBRE LA INESTABILIDAD)

SI PARA EL SISTEMA $x'(t) = f(t, x(t))$ CON $f(t,0) \equiv 0$ $\forall t \geq 0$, EXISTE UNA FUNCIÓN

$$V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

DIFERENCIABLE DE MODO QUE $\exists h > 0$ TAL QUE EN $\overline{B_0(h)}$ SE VERIFICA:

1) $\forall \delta > 0$ Y $B_0(\delta)$.

SEA $B_0(\delta) \cap \{x \in \overline{B_h(0)} : V(x) > 0\} = R. \neq \emptyset$

DE MODO QUE $V(x) = 0$ Y $x \in \overline{R}$ $\Leftrightarrow$ $x \in B_0(\delta) \cap \overline{\{x \in B_h(0) : V(x) > 0\}}$.

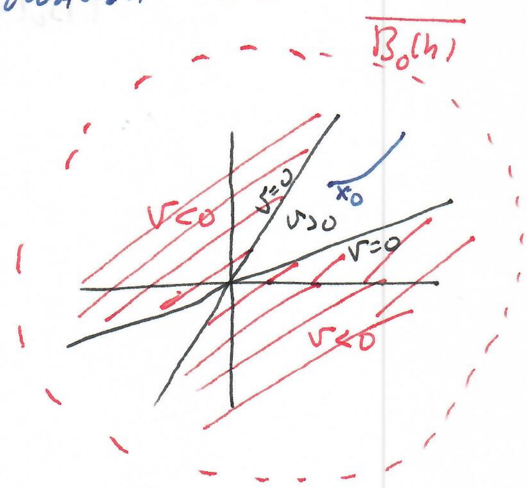
2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1 \ldots x_n) > 0$ $\forall x \in \{x \in \overline{B_0(h)} : V(x) > 0\}$

Y ADEMÁS $\forall \alpha > 0$ $\exists \beta > 0$ CON

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1 \ldots x_n) \geq \beta > 0$$

$\forall x \in \{x \in \overline{B_h(0)} : V(x) \geq \alpha\}$.

ENTONCES LA SOLUCIÓN ESTACIONARIA $x \equiv 0$ ES INESTABLE



DEM

$\forall \delta > 0$ $(\delta < h)$ Y SEA $B_0(\delta)$.

SEA LA REGIÓN $R_\delta \neq \emptyset$

R_δ ES UN ABIERTO YA QUE

$R_\delta = B_0(\delta) \cap \{V(x) > 0\}$.

$(B_0(\delta) \subsetneq \overline{B_0(h)})$.

SEA $x_0 \in R_\delta$ Y SEA $\bar{x}$ SOLUCIÓN DE $\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

COMO $\dfrac{\partial\, V \circ \bar{x}(t)}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\bar{x}(t)) \cdot f_i(t, \bar{x}(t)) > 0$ SI $x \in \{x \in \overline{B_0(h)} : V(x) > 0\}$

PARA $V(\bar{x}(t_0)) = V(x_0) = \alpha > 0$ (POR LA HIPÓTESIS 1: $V(x) \neq 0$ SI $x \in R_\delta$ ABIERTO)

ASÍ $V(\bar{x}(t)) \geq \alpha$ $\forall t \geq t_0$ CON $x(t) \in \{x \in \overline{B_0(h)} : V(x) > 0\}$

POR TANTO MIENTRAS $\bar{x}(t)$ NO ABANDONE EL $\overline{B_0(h)}$ SE SIGUE QUE $V(\bar{x}(t)) \geq \alpha$. (SI $\bar{x}(t)$ ABANDONA $\overline{B_0(h)}$ EN ALGÚN MOMENTO POSTERIOR A t_0, LA SOLUCIÓN $X \equiv 0$ DEJA DE SER ESTABLE)

POR TANTO DE SUPONER QUE $\bar{x}(t_0) = x_0 \in R_\delta$ Y DE QUE

$\bar{x}(t) \in \overline{B_0(h)}$ $\forall t \in [t_0, \infty)$.

SE SIGUE QUE $V(\bar{x}(t)) \geq \alpha$ Y ASÍ

$$(V\circ\bar{x})'(t) \geq \beta \quad \forall t \geq t_0$$

INTEGRANDO

$$V\circ\bar{x}(t) - V(x_0) \geq \beta(t-t_0)$$

ASÍ $V\circ\bar{x}(t) \geq \alpha + \beta(t-t_0) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$

LO QUE CONTRADICE QUE $\bar{x}(t) \in \overline{B_0(h)}$ $\forall t\geq t_0$

YA QUE POR SER V CONTINUA

$V|_{\overline{B_0(h)}}$ ESTÁ ACOTADA.

EJEMPLOS

1° SEA $x'(t) = -y(t) - x^3(t)$
$y'(t) = -y^3(t) + x(t)$.

$f(x,y) = (-y-x^3, -y^3+x)$

$f(0,0) = 0$

SEA LA FUNCIÓN DE LIAPUNOV $V(x,y) = x^2+y^2 \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$y \; V(x,y) = 0 \iff x=y=0$

ADEMÁS

$$\frac{\partial V}{\partial x}(-y-x^3) + \frac{\partial V}{\partial y}(-y^3+x) =$$

$$= -2xy - 2x^4 + 2y(-y^3+x) =$$

$$= -\cancel{2xy} - 2x^4 - 2y^4 + \cancel{2yx} = -2(x^4+y^4) \leq 0$$

ADEMAS $\forall r > 0$ SI $\|(x,y)\| \geq r$ $\left(\iff (\sqrt{|x|})^4 + (\sqrt{|y|})^4 \geq r^2\right)$

$$\frac{\partial V}{\partial t} \leq -2\beta < 0$$

POR LO TANTO $x \equiv 0$ ES ASINTÓTICAMENTE ESTABLE

2° $x_1'(t) = -x_1(t)x_2^4(t)$
$x_2'(t) = x_1^4(t)x_2(t)$

$f(x_1, x_2) = (-x_1x_2^4, x_1^4x_2)$.

$f(0,0) = 0$.

SEA LA FUNCIÓN DE LIAPUNOV $V(x_1,x_2) = x_1^4 + x_2^4 \geq 0$

$V(x_1,x_2) = 0 \iff x_1 = x_2 = 0$

$\bar{x}(t)$ SOLUCIÓN DEL SISTEMA.

ADEMAS $\dfrac{\partial V \circ \bar{x}(t)}{\partial t} = 4x_1^3(-x_1x_2^4) + 4x_2^3(x_1^4x_2) \equiv 0$

LO QUE DICE QUE $x \equiv 0$ ES ESTABLE

OBSERVACIÓN $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, x_0 \neq 0$ LA SOLUCIÓN $\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

VERIFICA QUE $\dfrac{\partial V \circ \bar{x}}{\partial t} \equiv 0$ LUEGO $V \circ \bar{x} \equiv cte$

ASÍ $\bar{x}(t) \in \{x \in \mathbb{R}^n : V \equiv V(x_0)\}$.

LUEGO $x(t)$ ES LA CURVA DE NIVEL $V = V(x_0)$.

EJEMPLOS

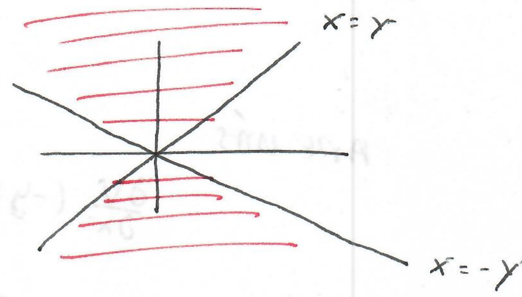
3:) SEA EL SISTEMA

$$\frac{\partial x}{\partial t} = y^3 + x^5 \qquad f(x,y) = (y^3 + x^5,\ x^3 + y^5)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = x^3 + y^5 \qquad f(0,0) = 0.$$

SEA $V(x,y) = x^4 - y^4$

1) $V > 0$ SI $|x| > |y|$.



2:) $\frac{\partial V}{\partial t} = 4x^3(y^3 + x^5) + 4y^3(x^3 + y^5) =$

$= \cancel{4x^3y^3} + 4x^8 - \cancel{4y^3x^3} - 4y^8$

$= 4x^8 - 4y^8 > 0$ PARA $|x| > |y|$.

Y PARA $V \geq \alpha > 0$ ES CLARO QUE $\frac{\partial V}{\partial t} \geq \beta > 0$. $\left(\frac{\partial V}{\partial t} = 4x^8 - 4y^8 = (2x^4 - 2y^4)(2x^4 + 2y^4) \geq \alpha^2\right.$ SI $\left.2x^4 - 2y^4 \geq \alpha\right)$

POR LO TANTO $(x,y) \equiv 0$ ES INESTABLES.

4:) SEA $\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial u(x_1 \dots x_n)}{\partial x_i}$ $\quad u\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ Y $f(x) = \nabla u$.

DONDE u TIENE UN MÁXIMO ESTRICTO EN $x = 0$

TOMEMOS COMO FUNCIÓN DE LIAPUNOV. (SI u ES DIFERENCIABLE CON CONTINUIDAD $\nabla u(0) = 0$)

1:) $V(x) = u(0) - u(x) \geq 0$

$V(x) = 0 \iff u(x) = u(0) \iff x = 0.$

2:) $$\frac{\partial V}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \leq 0.$$

SE CUMPLE POR TANTO LAS CONDICIONES Y SE TIENE QUE $x \equiv 0$ ES ESTABLE

5:) SEA $\frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j$, DONDE $a_{ij}(t) = -a_{ji}(t)$ PARA $i \neq j$ Y TODAS LAS $a_{ii}(t) \leq 0$

SEA $V(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ FUNCIÓN DE LIAPUNOV, YA QUE

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial x_i}{\partial t} = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_i x_j = 2\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) x_i^2 \leq 0.$$

LUEGO LA SOLUCIÓN $x \equiv 0$ ES ESTABLE

COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO GLOBAL. PRINCIPIO DE INVARIANZA DE LA SALLE.

EJEMPLO En la ecuación del péndulo con rozamiento

$$x' = y$$

$$y' = -\operatorname{sen} x - cy$$

La ecuación de la energía

$$V(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + 1 - \cos x \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2$$

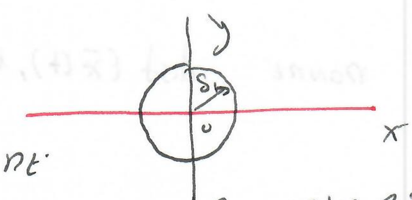
resultaba ser una ecuación de Liapunov.

$$(1) \quad \frac{\partial V \circ \bar{x}(t)}{\partial t} = y \operatorname{sen} x + y(-\operatorname{sen} x - cy) = -cy^2 \leq 0.$$

En un péndulo con rozamiento, "experimentalmente", las soluciones convergen asintóticamente a la posición de equilibrio $x=0$; aunque esto no podemos deducirlo directamente de que

$$-cy^2 \leq 0.$$

ya que la recta $y=0$ anula (1) y no se puede aplicar el teorema de Liapunov de estabilidad asintótica.



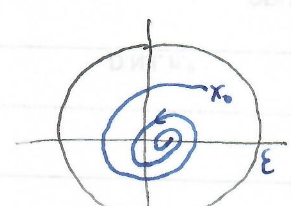
EJEMPLO Sea $x'(t) = f(x(t))$ un sistema autónomo con $f(0)=0$. Si suponemos que $x \equiv 0$ es estable

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x_0 \in B_0(\delta) \Rightarrow \bar{x}(t)$ solución de $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

es una trayectoria con

$$\bar{x}(t) \in B_0(\varepsilon) \quad \forall t \geq t_0$$

Así está acotada y según el teorema de Bolzano-Weierstrass $\{\bar{x}(t) : t \geq t_0\}$ tiene puntos de acumulación (ω-límite), es decir $\bar{x}(t)$ se aproxima "algo" que no tiene que ser necesariamente un punto.



ω- LÍMITES.

SEA EL PROBLEMA $x'(t) = f(x(t))$. $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

A ABIERTO, $f \in C^1(A)$. PARA QUE HAYA EXISTENCIA Y UNICIDAD.

DEF SEA $\bar{x}(t)$ LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

$$(1) \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

CURVA CON $\underbrace{\bar{x}(t) \in A \text{ Y } \bar{x}(t)}_{\{\bar{x}(t)\,:\, t \geq t_0\} \subseteq A}$ ACOTADA, CON

a) UN PUNTO $y \in A$ SE LLAMA ω- LÍMITE DE $\bar{x}$

SI $\exists (t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ TAL QUE $\lim_{n\to\infty} \bar{x}(t_n) = y$.

AL CONJUNTO DE TODOS LOS ω- LÍMITES DE $\bar{x}$

SE LE DENOTA POR. $\omega(x_0)$. (SOLO HAY UNA SOLUCIÓN $\bar{x}$ DE (1) CON $x(t_0) = x_0$). CONJUNTO ω- LÍMITE

b) DIREMOS QUE UN CONJUNTO $M \subseteq A$ ATRAE A UNA TRAYECTORIA $\{\bar{x}(t) : t \geq t_0\} \overset{not}{=} \gamma^+(x_0)$.

SI $dist(\{\bar{x}(t)\}, M) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ $(\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : t > T \Rightarrow dist(\{\bar{x}(t)\}, M) < \varepsilon)$.

DONDE $dist(\bar{x}(t), M) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists T > 0$ TAL QUE $\forall t > T \Rightarrow \bar{x}(t) \in B_\varepsilon(M) =$
$= \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in M : \|x - y\| < \varepsilon\}$.

TEOREMA (PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE CONJUNTOS ω-LÍMITES)

SEA $\{\bar{x}(t) : t \geq t_0\} \subset A$ SOLUCIÓN ACOTADA DE $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \in A \end{cases}$

CON $f \in C^1(A)$, TRAYECTORIA ACOTADA. ENTONCES EL CONJUNTO ω_0-LÍMITE ES NO VACÍO, ACOTADO, CERRADO INVARIANTE(*) Y ATRAE A $\{\bar{x}(t) : t \geq t_0\}$

(*) PARA VER ESTO SE USA EL TEOREMA DE DEPENDENCIA CONTINUA QUE AÚN NO CONOCEMOS.

DEM $\{\bar{x}(t) : t \geq t_0\} \ni x_0$ ES UN CONJUNTO ACOTADO LUEGO $\overline{\{\bar{x}(t) : t \geq t_0\}}$ ES ACOTADO Y ASÍ $\omega(x_0)$ TAMBIÉN SERÁ ACOTADO.

$\omega(x_0)$ ES NO VACÍO, POR EL TEOREMA DE BOLZANO WEIERSTRASS. (SEA $t_n \to \infty$ Y SEA $\{\bar{x}(t_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ CONJUNTO ACOTADO, $\exists\, y \in A$ TAL QUE $\bar{x}(t_{n_k}) \to y$ PARA ALGUNA SUBSUCESIÓN (SE NECESITA DE LA DEFINICIÓN DE ω-LÍMITE QUE $\overline{\{\bar{x}(t) : t \geq t_0\}} \subseteq A$)).

PARA VER QUE $\omega(x_0)$ ES CERRADO SE USA QUE

$$\omega(x_0) = \bigcap_{T \geq t_0} \overline{\{\bar{x}(t) : t \geq T\}}$$

(LA INTERSECCIÓN INFINITA DE CERRADOS ES UN CERRADO).

- SI $y \in \omega(x_0)$ $\exists\, t_n \to \infty$ CON $\bar{x}(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} y$
  ASÍ $y \in \overline{\{\bar{x}(t) : t \geq T\}}$ $\forall\, T \geq t_0$

- PARA $k \in \mathbb{N}$ $\exists\, t_k \geq t_0 + k$ CON $\|\bar{x}(t_k) - y\| < \frac{1}{k}$
  $(y \in \overline{\{\bar{x}(t) : t \geq t_0 + k\}}$

ASÍ $t_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ Y $\bar{x}(t_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} y$, LUEGO $y \in \omega(x_0)$.

VEAMOS QUE $\omega(x_0)$ ES INVARIANTE (E.D. SI $y \in \omega(x_0)$ Y $\bar{y}(t)$ ES LA SOLUCIÓN DE $\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = y \end{cases}$ ENTONCES $\bar{y}(t) \in \omega(x_0)$ $\forall\, t \geq t_0$)

$\exists\, t_n \to \infty$ CON $\bar{x}(t_n, x_0) \longrightarrow y$. PARA $t \in \mathbb{R}$

PROPIEDAD DE LOS SISTEMAS AUTÓNOMOS CON UNICIDAD

$$\bar{x}(t + t_n, x_0) = \bar{x}(t, \bar{x}(t_n, x_0)) \longrightarrow \underset{\bar{y}(t)}{\overset{\|}{\bar{x}(t, y)}}$$

TEOREMA DE DEPENDENCIA CONTINUA AÚN SIN PROBAR.

Como $t+t_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, $\bar{x}(t,y)$ también es un w-límite de $\bar{x}$

Así $\bar{x}(t,y) \in W(x_0)$ $\forall t \geq t_0$, lo que prueba la invarianza de $W(x_0)$.

$\boxed{\text{Veamos por último que } W(x_0) \text{ atrae a } \bar{x}.}$

Veámoslo por reducción al absurdo si existiese $\varepsilon > 0$ y una sucesión $t_k \to \infty$

con $dis(\bar{x}(t_k, x_0), W(x_0)) \geq \varepsilon$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Como $\{\bar{x}(t_k)\}_{k=1}^{\infty}$ está acotado $\exists\, t_{k_n} \to \infty$

con $\bar{x}(t_{k_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} z \in W(x_0)$

pero $dis(x(t_{k_n}, x_0), z) \geq \varepsilon$ $\forall z \in W(x_0)$

lo que nos lleva a contradicción.

Veamos ahora la relación entre los w-límites y las funciones de Liapunov, si estas existen.

Proposición Sea $x'(t) = f(x(t))$ con $f \in C^1(A)$.

Supongamos que V es una función de Liapunov.

- $V \geq 0$
- $\frac{\partial V}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \cdot f_i(x) \leq 0$ $\forall x \in A$.

Sea $\bar{x}$ solución del problema con $\bar{x}(t_0) = x_0$ tal que $\exists\, U$ abierto acotado con $\bar{U} \subset A$ y $\bar{x}(t) \in \bar{U}$ $\forall t \geq t_0$

(Así $\{\bar{x}(t) : t \geq t_0\}$ está acotada). Si $W(x_0)$ es el w-límite de $\bar{x}$ se sigue que

$\forall y \in W(x_0) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(y) \cdot f_i(y) = 0.$

Dem: Por hipótesis $V \circ \bar{x}(t)$ $t \geq t_0$, es decreciente y acotada por tanto $\exists$ $\ell = \lim_{t\to\infty} V \circ \bar{x}(t)$

Si $y \in W(x_0)$ $\exists\, t_k$: $x(t_k) \to y$ y así $V(y) = \ell$ $\forall y \in W(x_0)$. Como $W(x_0)$ es invariante sea $\bar{y}(t,y) \in W(x_0)$ y por tanto $V \circ \bar{y} \equiv \ell$ así $\frac{\partial V \circ \bar{y}}{t} \equiv 0$ en particular $\frac{\partial V \circ \bar{y}(t_0)}{\partial t} \equiv 0$ //